

# Übungsblatt 8

## Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger  
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 21. Juni 2013, 12 Uhr

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Nullstellenmenge einer auf einem Gebiet  $D$  definierten von der Nullfunktion verschiedenen meromorphen Funktion ist diskret in  $D$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $a, b, c$  drei verschiedene Punkte der Zahlkugel  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Man zeige, dass es genau eine Möbius-Transformation  $M$  mit der Eigenschaft

$$Ma = 0, Mb = 1, Mc = \infty$$

gibt.

Hinweis: Betrachten Sie das *Doppelverhältnis*

$$DV(z, a, b, c) := \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c}.$$

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für die folgenden Funktionen bestimme man in allen ihren Singularitäten die Residuen:

1. 
$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2},$$

2. 
$$\exp(1/z) + \frac{1}{z},$$

3. 
$$\frac{\exp(z)}{(z-1)^2},$$

4. 
$$\frac{1}{\sin \pi z}.$$

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  eine rationale Funktion. Man zeige die *Geschlossenheitsrelation*:

$$\sum_{p \in \overline{\mathbb{C}}} \text{Res}(f; p) = 0.$$