

Übungsblatt 9

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 28. Juni 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wie viele Nullstellen besitzt das Polynom $z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$? Geben Sie die Lage der übrigen Nullstellen möglichst genau an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei f holomorph in einer offenen Menge D , welche die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\bar{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ enthält und es sei $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in der offenen Einheitskreisscheibe \mathbb{E} . f hat genau einen Fixpunkt in \mathbb{E} .

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6},$$

2.
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 5} dx = \frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - 1).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Gauß'sche Fehlerintegral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Integrieren Sie dazu die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1 + \exp(-2az)}$$

mit $a = e^{\pi i/4} \sqrt{\pi}$ längs eines Parallelogramms mit den Ecken $-R, -R+a, R+a, R$ und vollziehen den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$. Beachten Sie:

$$f(z) - f(z+a) = \exp(-z^2).$$