

Übungsblatt 3

Kurven im \mathbb{R}^n

9. Taxi-Geometrie

Es seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $p = (p_1, p_2)$ und $q = (q_1, q_2)$. Wir definieren einen Abstand durch $d(p, q) = |q_1 - p_1| + |q_2 - p_2|$. Diesen Abstand hat ein Autofahrer zurückzulegen, der in einer Stadt (z.B. Manhattan, Mannheim,...) mit parallelen bzw. zueinander senkrechten Strassen vom Punkt p zum Punkt q gelangen möchte.

- (a) (2 Punkte) Verifizieren Sie die Axiome M1 - M3.
- (b) (1 Punkt) Sei $r \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer Punkt. Folgt aus $d(p, q) + d(q, r) = d(p, r)$, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen ?
- (c) (1 Punkt) Gibt es eine Kürzeste zwischen p und q ? Warum (nicht) ?

10. Innere Metrik

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $d_{\text{Weg}} : M \times M \rightarrow [0, \infty]$ seine innere Metrik. Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) (1 Punkt) Für alle $p, q \in M$ gilt $d_{\text{Weg}}(p, q) \geq d(p, q)$.
- (b) (2 Punkte) Die innere Metrik d_{Weg} ist eine Metrik.
- (c) (1 Punkt) Für jede parametrisierte Kurve stimmt die Bogenlänge bzgl. d mit der Bogenlänge bzgl. d_{Weg} überein. Folgern Sie daraus, dass (M, d_{Weg}) ein innerer metrischer Raum ist.

11. Innere Metrik im \mathbb{R}^n .

Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) (2 Punkte) (\mathbb{R}^n, d) mit $d(p, q) = |\overline{pq}|$ ist ein innerer metrischer Raum. Also ist jede Gerade eine Kürzeste.

- (b) (2 Punkte) Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann existieren $p, q \in \mathbb{R}^n$ und eine monotone Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(t) = (1 - \varphi(t))p + \varphi(t)q$ genau dann, wenn für alle $t' < t < t'' \in I$ entweder $\gamma(t') = \gamma(t)$ oder $\gamma(t) = \gamma(t'')$ oder $[\gamma(t'), \gamma(t), \gamma(t'')]$ gilt.

12. Schleppkurve

Ein Hundehalter läuft in $(0, 0)$ in Richtung der y -Achse los und schleppt einen müden Hund, der sich in $(D, 0)$ befindet, mit. Die beiden haben also konstanten Abstand D .

- (a) (2 Punkte) Betrachten Sie die Kurve $y(x)$, die der Hund zurücklegt. Leiten Sie anhand einer Zeichnung eine Differentialgleichung für die Steigung y' her.
- (b) (2 Punkte) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ dieser Kurve mit Hilfe von geeigneten Winkelfunktionen an.

Abgabetermin: Dienstag, 7. Mai 2013 um 12:00 Uhr