Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg



# Übungsblatt 6

21. Schnitt konvexer Kurven mit Geraden

    (4 Punkte) Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, konvexe $\mathcal{C}^1$–Kurve. Zeigen Sie, dass gilt: Falls eine Gerade die Kurve $\gamma$ trifft, dann trifft sie sie entweder in einer Strecke (die auch nur ein Punkt sein kann) oder in genau zwei Punkten.

22. Zur Krümmung geschlossener Kurven

    (4 Punkte) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene $\mathcal{C}^3$–Kurve mit $\gamma(s) = \binom{x(s)}{y(s)}$ und Krümmung $\kappa(s)$. Weiter seien $A, B, C \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass gilt:
    $$\int_a^b (Ax + By + C)\,\dot{\kappa}\,\mathrm{d}s = 0.$$

23. Scheitel einer Ellipse

    (4 Punkte) Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte, konvexe $\mathcal{C}^3$–Kurve. Ein Punkt $\gamma(s_0)$ heisst Scheitel von $\gamma$ in $s_0 \in [a,b]$, falls $\dot{\kappa}(s_0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Ellipse $c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \to \binom{r\cos(t)}{R\sin(t)}$ $(0 < r < R)$ genau vier Scheitel hat, und geben Sie die entsprechenden Werte von $t$ an.

24. Vierscheitelsatz

    Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte, konvexe $\mathcal{C}^3$–Kurve mit Koordinaten $\binom{x}{y}$. Es soll zuerst angenommen werden, dass $\kappa$ auf keinem Teilintervall positiver Länge konstant ist. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (1 Punkt) $\gamma$ besitzt mindestens zwei Scheitel. Benennen Sie diese mit $s_1, s_2 \in [a,b], s_1 \neq s_2$.

    (b) (1 Punkt) Die Gerade $Ax + By + C = 0$ durch die Scheitel $\gamma(s_1)$ und $\gamma(s_2)$ (mit geeigneten $A, B, C \in \mathbb{R}$) schneidet die Kurve $\gamma$ in keinem weiteren Punkt.

(c) (1 Punkt) Die Funktion $s \mapsto \dot{\kappa}(s)$ wechselt ihr Vorzeichen in einem weiteren Punkt $s_3 \neq s_1, s_2$. Betrachten Sie dazu die Funktion $s \mapsto (Ax(s) + By(s) + C)\,\dot{\kappa}(s)$.

(d) (1 Punkt) Schliessen Sie, dass $\gamma$ mindestens vier Scheitel besitzt. Falls $\kappa$ auf einem Teilintervall positiver Länge doch konstant ist, gibt es unendlich viele Scheitel.

Abgabetermin: Dienstag, 4. Juni 2013 um 12:00 Uhr