Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 7

Kurven im $\mathbb{R}^3$

25. Konstante Krümmung

Es sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, reguläre $\mathcal{C}^1$–Kurve mit $|c| = 1$. Wir betrachten die Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3, s \mapsto \int_0^s c(u)\mathrm{d}u$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (1 Punkt) Die Krümmung von γ ist $\kappa = 1$.

(b) (1 Punkt) Jede nach Bogenlänge parametrisierte, reguläre $\mathcal{C}^2$–Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit $\kappa = 1$ und $\gamma(0) = 0$ lässt sich so darstellen.

(c) (1 Punkt) Die Kurve γ ist genau dann eine geschlossene $\mathcal{C}^2$–Kurve, wenn $c(0) = c(L)$, $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$ und $\int_0^L c(u)\mathrm{d}u = 0$.

(d) (1 Punkt) Welche Kurven γ erhält man, falls c ein Kreis ist ?

26. Konstante Windung

Es sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, reguläre $\mathcal{C}^3$–Kurve mit $|c| = 1$ und $\det(c, \dot{c}, \ddot{c}) > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Die Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3, s \mapsto \int_0^s c(u) \times \dot{c}(u)\mathrm{d}u$ hat konstante Windung $\tau = 1$.

(b) (2 Punkte) Jede nach Bogenlänge parametrisierte Frenet–Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ mit Windung $\tau = 1$ und $\gamma(0) = 0$ lässt sich so darstellen.

27. Darbouxscher Drehvektor

Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, Frenet–Kurve mit Frenet–Dreibein e_1, e_2, e_3. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Zu jedem $s \in [a, b]$ gibt es genau einen Vektor $D = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ mit $\dot{e}_i = D \times e_i$, $i = 1, 2, 3$. Welche Werte haben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

(b) (2 Punkte) Die Momentanbewegung von e_1, e_2, e_3 is eine Drehung um die Achse in Richtung D mit Winkelgeschwindigkeit $|D|$. D heisst Darbouxscher Drehvektor.

28. Böschungslinie

Eine Frenet–Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ heisst Böschungslinie, falls es ein festes $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, gibt, so dass v mit jeder Tangente denselben Winkel einschliesst. κ und τ bezeichnen die Krümmung bzw. die Torsion von γ. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Für Böschungslinien mit $\kappa \neq 0$ ist der Quotient τ/κ konstant und die Hauptnormale $\frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}$ ist senkrecht zu v.

(b) (1 Punkt) Jede Frenet–Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ mit $\tau = c\kappa$, $c \in \mathbb{R}$, ist eine Böschungslinie.

(c) (1 Punkt) Eine Frenet–Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Böschungslinie, wenn $D/|D|$ konstant ist, wobei D der Darbouxsche Drehvektor ist.

Für die Aufgaben (c) und (d) können Sie Bogenlängenparametrisierung voraussetzen.

Abgabetermin: Dienstag, 11. Juni 2013 um 12:00 Uhr