4. Übungsblatt zur Vorlesung „Elementargeometrie "
Dr. Oliver Fabert
Dipl. math. Alex Koenen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Freitag, den 14.06.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand der Punkte

(a) $p = \frac{i}{2}$ und $q = -\frac{i}{4}$.

(b) $p = \frac{1}{3} + \frac{i}{3}$ und $q = \frac{1}{3} - \frac{i}{3}$.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{P}$ die projektive Ebene und g, h Geraden in $\mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt p gibt, der weder auf g noch auf h liegt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

(a) Für eine Matrix $A \in Mat(2, \mathbb{C})$ mit $\det A = 1$ gilt

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn es komplexe Zahlen a, b mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ gibt.

(b) $SU(1,1)$ ist bezüglich Matrixmultiplikation eine nicht kommutative Gruppe.

Aufgabe 4:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_A : D &\to D \\ z &\mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \end{aligned}$$

wohldefiniert mit $|\phi_A(z) = 1|$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

(b) Zeigen Sie $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$ für alle $A, B \in SU(1,1)$.