5. Übungsblatt zur Vorlesung „Elementargeometrie "
Dr. Oliver Fabert, Dipl. math. Alex Koenen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Freitag, den 05.07.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Wir betrachten die in der Vorlesung kennengelernte Zuordnung einer projektiven Ebene $\mathcal{P}$ zu einer affinen Ebene $\mathcal{A}$ durch Hinzufügen einer Gerade g_∞ im Unendlichen. (Satz 1.62) Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{P} = (\tilde{P}, \tilde{G}, \tilde{I})$ ist eine projektive Ebene und es gilt $\mathcal{P}_{g_\infty} = \mathcal{A} = (P, G, I)$.

(b) Sei $\mathcal{P}$ eine projektive Ebene mit endlich vielen Punkten. Dann gibt es $n \geq 2$, sodass jede Gerade genau $n+1$ Punkte trägt und die Anzahl der Punkte und Geraden n^2+n+1 ist.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die Zuordnung aus Aufgabe 1 bzw. aus Satz 1.62 für $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ den projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$ liefert.

Aufgabe 3:
Es seien $a > b > 0$ reelle Zahlen. Sei

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

Bestimmen Sie die Brennpunkte p_1 und p_2 der Ellipse E. Geben Sie alle Hyperbeln an, die Brennpunkte p_1 und p_2 haben.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie den Typ und Brennpunkt(e) des Kegelschnittes

$$0 = q(x, y) = -x^2 - y^2 + 6xy + 2x - y - \frac{1}{2}$$

durch Lösen folgender Teilaufgaben:

(a) Schreiben Sie die Gleichung in Matrixnotation und berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 der zugehörigen Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine orthonormierte Eigenbasis $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie: Es gilt $S := (v_1, v_2) \in O(2)$ und SAS^t ist eine Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A.

(c) Berechnen Sie einen Translationsvektor $v \in \mathbb{R}^2$, sodass in den neuen Koordinaten $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} := S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$ die Gleichung

$$0 = q(x, y) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 - \frac{9}{32}$$

gilt.

(d) Von welchem Typ ist der Kegelschnitt $0 = q(x, y)$? Wo sind die Brennpunkte in den alten Koordinaten x, y?