6. Übungsblatt zur Vorlesung „Elementargeometrie "
Dr. Oliver Fabert, Dipl. math. Alex Koenen

Dieses Blatt dient als Klausurvorbereitung und wird nicht bepunktet.

Aufgabe 1:
Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

(a) Wieviele Punkte besitzt die affine Ebene $\mathbb{F}_p^2$ (mit Begründung)?

(b) Wieviele Punkte beisitzt die projektive Ebene $\mathbb{F}_p P^2$?

(c) Wieviele Punkte besitzt die Gerade in $\mathbb{F}_p P^2$

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des euklidischen Kreises der die hyperbolische Gerade durch $(0, 1/3)$ und $(1/2, 0)$ in der Poincareschen Kreisscheibe bestimmt.

(b) Bestimmen Sie den hyperbolischen Abstand der Punkte der Punkte $(1/2, -1/3)$ und $(-1/4, 1/6)$ in der Poincareschen Kreisscheibe.

Aufgabe 3: Gegeben sei

$$0 = q(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 + bx + c$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\{(x, y) \mid q(x, y) = 0\}$ für $b = 0$ und $c \in \{-1, 0, 1\}$. Wo liegen eventuelle Brennpunkte in den (x, y) Koordinaten?

(b) Sei $c = 0$ und $b = -1$. Bringen Sie die Gleichung $q(x, y) = 0$ in eine Normalform und entscheiden Sie, welche Lösungsmenge vorliegt und wo eventuelle Brennpunkte liegen.

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

(a) Eine orthogonale Matrix $A \in O(3)$ besitzt den Eigenwert $\lambda = \pm 1$. (Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass ein Polynom 3. Grades eine reelle Nullstelle hat)

(b) Für eine quadratische Matrix A mit $A^t A = id$ gilt auch $AA^t = id$.