Komplexe Zahlen

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: Körper der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $i^2 = -1$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Unterkörper
  $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$:
  $z + w = (x + u) + i(y + v)$, $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$.
- Komplexe Konjugation $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$.
- Betrag $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Polarkoordinatendarstellung: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$,
  $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$, Hauptwert des Arguments, falls $\varphi \in]-\pi, \pi]$.
- n-te Einheitswurzeln $\zeta_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $(\zeta_k)^n = 1$,
  $0 \leq k < n$.

Elementare komplexe Funktionen

- Eigenschaften von (konvergenten) Folgen und Reihen sind analog zur reellen Analysis.
- Polynome $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, $a_\nu \in \mathbb{C}$.
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\cos(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.
- $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$.
- exp ist nicht injektiv, periodisch mit Perioden $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.
- sin, cos haben genau dieselben Nullstellen wie in $\mathbb{R}$.
- Es existiert eine Umkehrfunktion $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ zu $\exp z$, der Hauptzweig des Logarithmus, eindeutig bestimmt durch $-\pi < \operatorname{Im} \operatorname{Log} z \leq \pi$ und $\exp(\operatorname{Log} z) = z$.
- $\operatorname{Log}(z) = \log |z| + i\operatorname{Arg}(z)$.
- Log ist nicht stetig entlang der negativen reellen Achse.

Komplexe Differenzierbarkeit

- $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar in $a \in D$, falls $\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} =: f'(a)$ existiert.
- Für D offen ist dies äquivalent zu:
  - f ist total differenzierbar in a und es gilt für die Jacobi–Abb.: $J(f;a)z = \ell\, z$ mit $\ell = f'(a)$, d.h. $J(f;a)$ ist $\mathbb{C}$–linear.
  - f ist total differenzierbar in a und für $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ gelten:

    die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

    $$\partial_x u(a) = \partial_y v(a), \quad \partial_y u(a) = -\partial_x v(a).$$
  - $\partial f = f'$, $\bar{\partial} f = 0$, mit $\partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$.
- f heisst dann **holomorph** in D, kurz $f \in \mathcal{O}(D)$, falls f für alle $a \in D$ komplex differenzierbar ist.
- Rechenregeln für f': $\Longrightarrow \mathcal{O}(D) \subset \mathcal{C}(D)$ ist $\mathbb{C}$–Unteralgebra.

Folgerungen aus komplexer Differenzierbarkeit

- f lokal konstant, wenn $\forall\, a \in D\ \exists U \subset D : f|_U$ ist konstant. Äquivalent zu: $f \in \mathcal{O}(D), f'(z) = 0\ \forall z \in D$.
- D zusammenhängend, wenn jede lokal konstante Funktion $D \to \mathbb{C}$ konstant ist.
- Satz für implizite Funktionen: $f \in \mathcal{O}(D)$, injektiv, $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $f(D) \subset \mathbb{C}$ offen, $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(D))$ und $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.
- $f \in \mathcal{O}(D)$, $f = u + iv$. Dann sind u, v harmonisch, d.h. $\Delta u = \Delta v = 0$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Konforme Abbildungen

- Eine lineare, bijektive Abb. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst konform, wenn sie orientierungstreu und winkelerhaltend ist.
- $f : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist (im Kleinen) konform, falls $J(f; a)$ für alle $a \in D$ konform ist.
  f ist im Grossen konform, falls f auch noch bijektiv ist.
- $D \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, $f : D \to \mathbb{C}$ total differenzierbar. Dann gilt:
  $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f'(z) \neq 0 \; \forall \, z \in D \iff f$ ist konform. (Für eine Verallgemeinerung siehe weiter unten.)

Kurvenintegrale

- Glatte Kurve: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Bogenlänge: $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
- Komplexes Integral: $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\ g(t)dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\ g(t)dt$,
- $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, f stetig, $\mathrm{im}\gamma \subset D$. Kurvenintegral: $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.
  - $\mathbb{C}$–linear.
  - Standardabschätzung: $\left|\int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right| \leq C\, L(\gamma)$, falls $|f(z)| < C$ für $z \in \mathrm{im}\ \gamma$.
  - Verallgemeinerung des Riemann–Integrals.
  - Transformationsinvarianz: $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma\circ\phi} f(\zeta)d\zeta$
  - Fundamentalsatz: $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, falls eine Stammfunktion F von f existiert.
  - $\int_{\gamma_1 \pm \gamma_2} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta \pm \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta$

Die Cauchysche Integralformel

- $f \in \mathcal{O}(D), \overline{B}_r(z_0) \subset D,\ r > 0$. Dann gilt $\forall\, z \in B_r(z_0)$ die

die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- f ist beliebig oft differenzierbar, jede Ableitung von f ist wieder holomorph, und für $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall\, z \in B_r(z_0)$ gilt

die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

- Leibnizregel für die Differentiation unter dem Integral $g : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ stetig, D offen, $\forall\, t \in [a,b]$ fest sei $g(t,-) \in \mathcal{O}(D)$, $\frac{\partial g}{\partial z} : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt: $G(z) = \int_a^b g(t,z)dt \in \mathcal{O}(D)$ und $G'(z) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z} dt$.

Anwendungen der Cauchyschen Integralformeln

- Satz von Morera: Für $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und jeden Dreiecksweg $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ mit zugehöriger Dreiecksfläche $\Delta \subset D$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$. Dann ist f holomorph in D.
- Satz von Liouville:
  Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.
- Fundamentalsatz der Algebra
  Jedes nicht konstante Polynom P besitzt eine Nullstelle.
  Falls $\deg P = n \geq 1$, dann existieren $C \in \mathbb{C}^{\times}$, $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, \ldots, n$ so dass $P(z) = C \prod_{\nu=1}^{n} (z - \alpha_\nu)$.

Gleichmässige Approximation

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ heisst gleichmässig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $z \in D$.
  (f_n) konvergiert lokal gleichmässig gegen f, falls $(f_n|_{U\cap D})$ gleichmässig konvergiert für eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmässig konvergente Folge *stetiger* Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Grenzwert ist *stetig* und darf mit Kurvenintegral (für alle γ stückweise glatt) vertauscht werden:
  $$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(\zeta) d\zeta = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) d\zeta$$
- Satz von Weierstraß: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmässig konvergente Folge *holomorpher* Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Der Grenzwert f ist *holomorph*. Weiter dürfen Grenzwert und Ableitung vertauscht werden:
  $$f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Normale Konvergenz

- Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n, f_n : D \to \mathbb{C}$ heisst (lokal) gleichmässig konvergent, falls die Folge der Partialsummen (lokal) gleichmässig konvergent ist.
  Eine Reihe heisst normal konvergent in D, falls gilt:
  $\forall\, a \in D\, \exists\, U(a) \subset D$ offen und $(M_n)_{n\geq 0}, M_n \geq 0$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ und $|f_n(z)| \leq M_n \;\forall\, z \in U(a) \cap D,\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.
- Eine normal konvergente Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmässig.
- Satz von Weierstrass: Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe mit $f_n \in \mathcal{O}(D)$. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D)$, Grenzfunktion und Ableitung dürfen vertauscht werden

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

  und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ konvergiert normal.

Cauchyscher Entwicklungssatz

- Zu jeder Potenzreihe um 0 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, existiert eine eindeutige bestimmte Zahl $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, der Konvergenzradius, so dass f in $B_r(0)$ normal konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ divergiert.
- $f \in \mathcal{O}(D)$, $B_R(a) \subset D, R > 0$. Dann gilt

der Cauchysche Entwicklungssatz

$\forall\, z \in B_R(a)$, $0 < \rho < R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

Holomorphie

Sei $D \in \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ Dann sind äquivalent:

- f ist holomorph, d.h komplex differenzierbar in jedem $z \in D$.
- f ist total differenzierbar und $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ erfüllen die Cauchy–Riemannschen DGL
- f ist stetig und für jeden Dreiecksweg $\partial\Delta$, $\Delta \subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$
- f besitzt lokal eine Stammfunktion
- f ist stetig und besitzt eine Integraldarstellung durch die Cauchysche Integralformel
- f ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar
- f besitzt für alle $B_r(a) \subset D$ eine konvergente Cauchysche Potenzreihenentwicklung
- f ist konform, falls $f'(z) \neq 0 \, \forall \, z \in D$

Rechenregeln für Potenzreihen

Seien f, g Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen auf D.

- Identitätssatz $f = g$
- Multiplikationssatz von Cauchy fg
- Inversionssatz $1/f$
- Doppelreihensatz von Weierstrass
- Umordnungssatz $\sum a_n(z-a)^n = \sum b_n(z-b)^n$
- Verkettungssatz $f \circ g$
- Umkehrungssatz: Gegeben f, dann existiert g mit $f(g(z)) = z$.

Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Seien im folgenden $f, g \in \mathcal{O}(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \neq \emptyset$.

- Identitätssatz: $f = g$
  $\iff \{z \in D | f(z) = g(z)\}$ hat Häufungspunkt in D
  $\iff \exists\, z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.
- Satz von der Gebietstreue Sei f nicht–konstant.
  Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.
- Maximumprinzip: Gilt $|f(a)| \geq |f(z)|$ für ein $a \in D$ und alle $z \in D$, dann ist f konstant.
- Maximumprinzip für beschränkte Gebiete: Sei D beschränkt, f stetig auf $\overline{D}$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂D an.
- Minimumprinzip: Ist f nicht konstant und gilt $|f(a)| \leq |f(z)|$ für ein $a \in D$ und alle $z \in D$, dann ist $f(a) = 0$.

Singularitäten holomorpher Funktionen

- Seien $f \in \mathcal{O}(D), a \in \mathbb{C} \setminus D$, so dass die punktierte Kreisscheibe $\mathring{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ in D liegt. a heisst isolierte Singularität von f
- a heisst hebbar, falls $\exists \widetilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{a\})$ mit $\widetilde{f}|_D = f$.
- Riemannscher Hebbarkeitssatz: f ist hebbar in $a \iff$ $\exists$ punktierte Umgebung $\mathring{U} \subset D$ von a, so dass $f|_{\mathring{U}}$ beschränkt.
- a heisst ausserwesentlich, falls $\exists\, m \in \mathbb{Z}$, so dass $g(z) = (z-a)^m f(z)$ in a hebbar ist. Eine nicht-hebbare, ausserwesentliche Singularität a heisst Pol(stelle) von f. a heisst wesentlich, falls a nicht ausserwesentlich ist.
- Sei $k \in \mathbb{Z}$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, dann heisst $\operatorname{ord}_a(f) := -k$ Ordnung von f in a.
- a ist ein Pol von $f \iff \lim_{\substack{z \to a \\ z \in D}} |f(z)| = \infty$.
- Satz von Casorati–Weierstrass: Für eine wesentliche Singularität a von f ist das Bild $f(\mathring{U} \cap D)$ einer beliebigen punktierten Umgebung $\mathring{U}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Laurent–Zerlegung

- Seien $0 \leq r < R \leq \infty$. Sei $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ ein Ringgebiet und $f \in \mathcal{O}(\mathcal{R})$. Dann existieren $g \in \mathcal{O}(B_R(0))$ und $h \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{r}}(0))$ so dass $f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$. Die Zerlegung ist eindeutig, falls $h(0) = 0$.
- Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete: Sind ρ, P so gewählt, dass $r < \rho < P < R$, dann gilt:

$$\oint_{|\zeta|=\rho} f(\zeta)d\zeta = \oint_{|\zeta|=P} f(\zeta)d\zeta.$$

- Die Zerlegung $f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$ heisst Laurent–Zerlegung, g ihr Nebenteil, h ihr Hauptteil. Die Laurentreihe von f in R um 0 ist $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ mit a_n bestimmt durch $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < R$, und $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ für $|z| < \frac{1}{r}$. Es gilt: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \rho < R$.

Singularitäten holomorpher Funktionen

- Sei $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D)$. Die Singularität ist

$$\begin{array}{ccc} \text{hebbar} & \Longleftrightarrow & a_n = 0, \quad \forall n < 0. \\ \text{ein Pol der Ordnung } k & \Longleftrightarrow & a_{-k} \neq 0, a_n = 0, \quad \forall n < -k. \\ \text{wesentlich} & \Longleftrightarrow & a_n \neq 0 \text{ für unendliche viele } n < 0. \end{array}$$

Meromorphe Funktionen

- Die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist homöomorph zu S^2 mit der Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ gegeben durch die offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$, U offen, und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, $R > 0$.
- $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen, heisst meromorph, falls
  - $S(f) = f^{-1}(\infty)$ ist diskret in D
  - $f|_{D \setminus S(f)} \to \mathbb{C}$ ist holomorph
  - Die Punkte aus $S(f)$ sind Pole von $f|_{D \setminus S(f)}$.
  - $\widehat{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ ist in der offenen Menge $\widehat{D} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} \in D\right\}$ holomorph.
- $\mathcal{M}(D) = \{\text{meromorphe Funktionen } f : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ ist eine $\mathbb{C}$–Körper, $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{M}(D)$ ein $\mathbb{C}$–Unterring.
- $f = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}(D)$ heisst rationale Fkt. auf D, falls p, q, $q \not\equiv 0$, Polynome sind. $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \{\text{rationale Funktionen } f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}\}$
- Jede bijektive rationale Abb. $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Möbiustransf. $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.
- $\{\text{Möbiustransf. }\} \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ als Gruppe.

Residuensatz

- Sei γ eine geschlossene glatte Kurve, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}\gamma$. Die Umlaufzahl von γ bezügl. z ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \in \mathbb{Z}$. $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ ist lokal konstant.
- Sei a eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D)$. Der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f um a heisst Residuum von f in a, $\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta) d\zeta$, ρ klein genug.
- Für $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\}$ mit ausserwesentlicher Singularität in a, $\mathrm{ord}_a(f) = -k, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{Res}_a(f) = \frac{1}{(k-1)!}\widetilde{f}^{(k-1)}(a)$, $\widetilde{f}(z) = (z-a)^k f(z)$. Weiter $\mathrm{Res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathrm{ord}_a f$ für $f \not\equiv 0$.
- Residuensatz Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_1, \ldots, z_k \in D$, $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$, $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ eine geschlossene glatte Kurve. Dann gilt

die Residuenformel

$$\oint_\gamma f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_j}(f)\mathrm{ind}_\gamma(z_j).$$

Anwendungen des Residuensatzes

- Satz von Hurwitz: D ein Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathcal{O}(D)$ lokal gleichmässig konvergent mit Grenzfkt. $f \in \mathcal{O}(D)$.
  - $f_n(z) \neq 0,\ \forall\, z \in D, n \in \mathbb{N}, \implies f \equiv 0$ oder $f(z) \neq 0\ \forall z \in D$.
  - $f_n(z)$ injektiv $\forall\, n \in \mathbb{N} \implies f =$ const oder f injektiv
- Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elem.gebiet $f \in \mathcal{M}(D)$, γ eine Kurve, die alle Pol- und Nullstellen von f genau einmal umläuft. Dann gilt:

die Anzahlformel für Pol- und Nullstellen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = N(0) - N(\infty).$$

- Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq$ const, $a \in D$, $b = f(a)$, $\mathrm{ord}_a(f(z) - b) = n$. Dann gibt es offene Umg. $U \subset D$ von a und $V \subset \mathbb{C}$ von b, so dass $\forall\, w \in V, w \neq b, \exists\, z_1, \ldots, z_n \in U$ mit $f(z_j) = w$ und $\mathrm{ord}_{z_j}(f(z) - w) = 1$, $1 \leq j \leq n$.
- Satz von Rouché: Sei D ein Elem.gebiet, $f, g \in \mathcal{O}(D)$, γ eine geschlossene Kurve in D mit $\mathrm{ind}_\gamma z = 1\ \forall\, z \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Sei $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|, \zeta \in \mathrm{im}\gamma$. Dann haben $f, f + g$ keine Nullstelle auf $\mathrm{im}\gamma$ und gleich viele Nullstellen in $\mathrm{Int}\gamma$.

Berechnung von reellen Integralen

- Seien p, q Polynome in zwei Variablen, $q(x, y) \neq 0$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(\cos t, \sin t)}{q(\cos t, \sin t)} dt = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{E}} Res_a f$$

  mit $f(z) = \frac{1}{iz} \frac{p\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)}{q\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)}$

- Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elem. gebiet mit $\overline{\mathbb{H}} \subset D$, $a_j \in D$, $1 \leq j \leq k$, $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \ldots, a_k\})$, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ und $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res_{a_j} f.$$

- Es seien p, q Polynome vom Grad m, n. Dann gibt es reelle Zahlen $K, L, R > 0$, so dass gilt:

$$K|z|^{m-n} \leq \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq L|z|^{m-n}, \ \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R.$$

Berechnung von reellen Integralen

- Seien $a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\})$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$. Dann gilt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}_w(f(z)e^{i\lambda z}), \lambda > 0.$$
- Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit endlicher Polstellenmenge $S(f) \subset \mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ so dass $\lim_{z \to 0}(-z)^\lambda f(z) = 0, \lim_{z \to \infty}(-z)^\lambda f(z) = 0$. Dann gilt:
$$\int_0^\infty f(x)x^{\lambda-1}dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \sum_{w \in \mathbb{C}_+} \mathrm{res}_w(f(z)(-z)^{\lambda-1}).$$
- Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

die Partialbruchentwicklung des Kotangens

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Unendliche Produkte

- Das unendliche Produkt $(1+a_1)(1+a_2)\dots$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}(1+a_\nu)$ existiert und wird mit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ bezeichnet.
- Ein Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$, $f_\nu = 1+g_\nu \in \mathcal{O}(D)$ heisst normal konvergent, wenn die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ normal konvergiert. In diesem Fall existiert die Grenzfunktion f mit $f \in \mathcal{O}(D)$. Insbesondere konvergiert jedes Produkt $\widehat{f}_n = \prod_{\nu\geq n} f_\nu$ normal und $f = f_1 f_2 \dots f_{n-1}\widehat{f}_n$.
- Falls $f \not\equiv 0$, dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f_\nu'}{f_\nu}$ normal konvergent in $D\setminus N(f)$ und es gilt $\frac{f'}{f} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f_\nu'}{f_\nu}$.

Die Gamma–Funktion

- $B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \text{Re } z, \text{Re } w > 0$ und $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \log t \in \mathbb{R}, \text{Re } z > 0$ heissen Beta– bzw. Gamma–Funktion.
- $\Gamma(z)$ ist für Re $z > 0$ eine holomorphe Fkt. und ist in $\mathbb{C} \setminus S$, $S = \{0, -1, -2, \dots\}$ holomorph fortsetzbar, es gilt:
  - $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$
  - $\Gamma(z)$ hat Pole 1. Ordnung in S mit $\text{Res}_{-n}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}$.
  - $\Gamma(1) = 1$.

  Die $\Gamma(z)$ ist im wesentlichen die einzige Funktion mit diesen Eigenschaften.
- Sei $G(z) = z\exp(\gamma z)\prod_{n=1}^\infty (1+\frac{z}{n})\exp(-\frac{z}{n})$. Dann gilt: $\frac{1}{\Gamma(z)} = G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)\dots(z+n)$.
- Weitere Eigenschaften:
  - $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$
  - $\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z+\frac{k}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)$

Weierstrass'scher Produktsatz und Satz von Mittag-Leffler

- Sei $S \in \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge und $m : S \to \mathbb{N}$, $s \mapsto m_s$ eine Abb. Dann existiert $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $N(f) = S$ und $m_s = \mathrm{ord}_s(f)$ für alle $s \in S$ und es gilt $f(z) = z^{m_0} \prod_{s \in S} \left(1 - \frac{z}{s}\right)^{m_s} \exp(P_s(z))$ für geeignete Polynome $P_s(z)$. f ist eindeutig bis auf einen Faktor $\exp(h(z))$ für $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Das Produkt kann mit Hilfe der Weierstrass–Faktoren $E_k(z)$ konstruiert werden: $E_0(z) = 1 - z$, $E_k(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{z^\ell}{\ell}\right)$.
- $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$
- Sei $S \in \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge und jedem $s \in S$ sei $h_s \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $h_s(0) = 0$, zugeordnet. Dann gibt es $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus S)$ mit Hauptteil h_s in $s \in S$, d. h. $f(z) - h_s(\frac{1}{z-s})$, $s \in S$, hat eine hebbare Singularität in $z = s$.

Der kleine Riemannsche Abbildungssatz

- Seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ offene Mengen. Dann heisst $\varphi : D \to D'$ konform, falls φ bijektiv und holomorph ist. D und D' heissen dann konform äquivalent.
- Falls $\varphi : D \to D'$ konform ist, so ist $\varphi^{-1} \in \mathcal{O}(D')$ und $\left(\varphi^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(w))}$ für alle $w \in D'$.
- Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ eine Teilmenge. $\mathcal{F}$ heisst beschränkt in $A \subset D$, falls es eine reelle Zahl $M > 0$ gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in A} |f(z)| < M$. $\mathcal{F}$ heisst lokal beschränkt, falls es für jedes $z \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ von z gibt, so dass $\mathcal{F}$ in U beschränkt ist.
- Satz von Montel: Jede in D lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{O}(D)$, besitzt eine lokal gleichmässig konvergente Teilfolge.
- Riemannscher Abbildungssatz: Sei D ein Elementargebiet, $D \neq \emptyset$, $D \neq \mathbb{C}$. Dann ist D konform äquivalent zu $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.