Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

Übungsblatt 1

1. Verkettung holomorpher Abbildungen
(4 Punkte) Es seien $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ offen, $f : V \to \mathbb{C}$ und $g : U \to V$ holomorph. Wählen Sie Variablen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ in U und $w = (w_1, \ldots, w_m)$ in V. Zeigen Sie, daß $f \circ g$ holomorph in U ist. Sie dürfen dazu die Ergebnisse aus der reellen Analysis und aus der Funktionentheorie verwenden.

2. Kompatible fast komplexe Strukturen
(4 Punkte) Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension 4. Zeigen Sie, daß die Menge aller kompatiblen fast komplexen Strukturen aus der Vereinigung zweier Kopien der 2–Sphäre S^2 besteht.

3. Es sei I eine fast komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum V. Zeigen Sie, daß gilt:
   (a) (1 Punkt) $\bigwedge^{p,q} V \subset \bigwedge^{p+q} V_{\mathbb{C}}$ ist ein Unterraum.
   (b) (1 Punkt) $\bigwedge^k V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V_{\mathbb{C}}$.
   (c) (1 Punkt) $\overline{\bigwedge^{p,q} V} \cong \bigwedge^{q,p} V \qquad \forall\, p, q$
   (d) (1 Punkt) Es gibt eine natürliche Abbildung $\bigwedge^{p,q} V \times \bigwedge^{r,s} V \to \bigwedge^{p+r,q+s} V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$.

4. Äussere Ableitung
Es sei M eine reelle Mannigfaltigkeit. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Die äussere Ableitung ist eine Abbildung $\mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$, die auf Vektorfeldern $X_1, \ldots, X_{k+1}$ wie folgt definiert ist:

$$(\mathrm{d}\alpha)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\alpha(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})) + \sum_{i<j}^{k+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j} \ldots, X_{k+1})$$

Dabei bedeutet $\widehat{X_i}$, daß das entsprechende Argument weggelassen wird.

Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) Für $M = U$ stimmt diese Definition mit $\mathrm{d}(f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ überein.

(b) (1 Punkt) $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta, \qquad \alpha \in \mathcal{A}^k(M), \beta \in \mathcal{A}^{k'}(M)$

(c) (2 Punkte) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Abgabetermin: Mittwoch, 7. Mai 2014 um 12:00 Uhr