Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

Übungsblatt 10

37. Meromorphe Differentialformen auf dem $\mathbb{P}^n$

   (a) (1 Punkt) Es sei φ eine meromorphe Differentialform vom Grad k auf $\mathbb{C}^n$, d.h. $\varphi = \frac{1}{G(z)} \sum_J F_J(z) \mathrm{d}z^J$ wobei $F_J(z)$ und $G(z)$ Polynome, $z = (z^1, \dots, z^n)$ Koordinaten auf $\mathbb{C}^n$, $J = (j_1, \dots, j_k)$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ und $\mathrm{d}z^J = \mathrm{d}z^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{j_n}$ sind. Bestimmen Sie den Pullback $\alpha := \pi^* \varphi$ unter der Abbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^n, (\zeta^0, \dots, \zeta^n) \mapsto (z^1, \dots, z^n)$ mit $z^i = \frac{\zeta^i}{\zeta^0}$, $\zeta^0 \neq 0$.

   (b) (1 Punkt) Es sei θ das Euler–Vektorfeld $\theta = \sum_{j=0}^n \zeta^j \frac{\partial}{\partial \zeta^j}$. Es sei α eine meromorphe Differentialform vom Grad k auf $\mathbb{C}^{n+1}$ wie in Aufgabe (a). Wir definieren die Kontraktion $i_\theta(\alpha)$ von α mit θ als die meromorphe Differentialform vom Grad $k-1$ auf $\mathbb{C}^{n+1}$, für die gilt: $i_\theta(\alpha) = \frac{1}{G(\zeta)} \sum_J F_J(\zeta) i_\theta(\mathrm{d}\zeta^J)$ und $i_\theta(\mathrm{d}\zeta^J) = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \zeta^{j_\ell} \mathrm{d}\zeta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\zeta^{j_\ell}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\zeta^{j_k}$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\mathrm{d}\zeta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\zeta^{i_k} = \left(\zeta^0\right)^k \mathrm{d}\left(\frac{\zeta^{i_1}}{\zeta^0}\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\zeta^{i_k}}{\zeta^0}\right) + \frac{\mathrm{d}\zeta^0}{\zeta^0} \wedge i_\theta(\mathrm{d}\zeta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\zeta^{i_k}).$$

   (c) (2 Punkte) Es sei α eine meromorphe Differentialform vom Grad k auf $\mathbb{C}^{n+1}$ wie in Aufgabe (a). Zeigen Sie, daß α genau dann von einer k–Form auf dem $\mathbb{P}^n$ induziert wird, falls $\deg G = \deg F_J + k$ und $i_\theta(\alpha) = 0$.

38. Holomorphe n–Formen auf Calabi–Yau–Mannigfaltigkeiten
   Es sei $Y \subset X$ eine glatte Hyperfläche in einer n–dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Es sei α ein meromorpher Schnitt von K_X mit höchstens einfachen Polen entlang Y, d.h. daß auf jeder an Y angepassten Karte (U, ϕ) mit Koordinaten $(z^1, \dots, z^n)$, so daß $\phi(U \cap Y) = \{(z^1, \dots, z^n) \in \phi(U) | z^1 = 0\}$, eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ existiert, so daß $\alpha|_U = h(z) \frac{\mathrm{d}z^1}{z^1} \wedge \mathrm{d}z^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n$. Wir definieren das Residuum von α durch $\mathrm{Res}_Y(\alpha)|_{U \cap Y} = h(z) \, \mathrm{d}z^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n|_Y$.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Res}_Y(\alpha)$ wohldefiniert ist, und daß es eine Klasse aus $\mathrm{H}^0(Y, K_Y)$ repräsentiert.

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie eine glatte Hyperfläche $Y \subset \mathbb{P}^n$ definiert durch ein homogenes Polynom $f \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, O(n+1))$. Es bezeichne $(\zeta^0 : \cdots : \zeta^n)$ die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$. Zeigen Sie, daß $\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i \zeta^i f^{-1} \mathrm{d}\zeta^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\zeta^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\zeta^n$ ein meromorpher Schnitt von $K_{\mathbb{P}^n}$ mit einfachen Polen entlang Y ist. Zeigen Sie weiter, daß $\mathrm{Res}_Y(\alpha) \in \mathrm{H}^0(Y, K_Y)$ eine holomorphe Volumenform auf Y, d.h. einen trivialisierenden Schnitt von K_Y definiert.

39. Chern–Klassen

Es seien $\gamma_i, i = 1, \ldots, r$ die Chernwurzeln eines komplexen Vektorbündels E vom Rang r gemäss dem "splitting principle", d.h. $\mathrm{c}(E) = \prod_{i=1}^r (1 + \gamma_i)$. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte)

$$\mathrm{c}\left(\bigwedge^p E\right) = \prod_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le r} (1 + \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_p})$$

Bestimmen Sie $\mathrm{c}(\det E)$.

(b) (2 Punkte)

$$\mathrm{ch}\left(\bigoplus_{p=0}^r \bigwedge^p E\right) = \prod_{i=1}^r (1 + \mathrm{e}^{\gamma_i})$$

40. Calabi–Yau–Bedingung

(4 Punkte) Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{b}_1(X) = 0$ und $\mathrm{c}_1(X) = 0$. Zeigen Sie, daß K_X holomorph trivial ist. Folgern Sie dazu $\mathrm{c}_1(K_X) = 0$ aus Aufgabe 39 und verwenden Sie die Exponentialsequenz.

Abgabetermin: Mittwoch, 16. 07. 2014 um 12:00 Uhr.