Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 3

9. Nijenhuis–Tensor
(4 Punkte) Es sei (M, I) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Nijenhuis–Tensorfeld $N : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, TM) \to \Gamma(M, TM)$ durch

$$N(X, Y) = [X, Y] + I[IX, Y] + I[X, IY] - [IX, IY], \qquad X, Y \in \Gamma(M, TM)$$

Zeigen Sie, daß eine fast komplexe Struktur I auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann integrabel ist, falls gilt: $N(X, Y) = 0$ für alle $X, Y \in \Gamma(M, TM)$.

10. Es sei (M, I) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Für $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}(M)$ sei $\mathrm{d}^{-1,2} : \mathcal{A}^{1,0}(M) \to \mathcal{A}^{0,2}(M)$ definiert durch $\mathrm{d}^{-1,2}\alpha = (\mathrm{d}\alpha)^{0,2} = \pi_{0,2}(\mathrm{d}\alpha)$. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (2 Punkte) $\mathrm{d}^{-1,2}$ ist $\mathcal{C}^\infty(M)$–linear.

   (b) (2 Punkte) Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 9 ist

$$\alpha(N(X, Y)) = -4(\mathrm{d}^{-1,2}\alpha)(X, Y) \qquad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}^{1,0}(M), X, Y \in \Gamma(M, TM).$$

11. 1–dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten

   (a) (1 Punkt) Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension 2 mit einer vorgegebenen Orientierung. Zeigen Sie, daß eine natürliche kompatible fast komplexe Struktur I existiert, die wie folgt definiert ist. Für jedes $0 \neq v \in V$ gilt für $I(v)$: $\langle v, I(v)\rangle = 0$, $||I(v)|| = ||v||$, und $\{v, I(v)\}$ ist positiv orientiert.

   (b) (2 Punkte) Zwei Skalarprodukte $\langle\ ,\ \rangle$ und $\langle\ ,\ \rangle'$ heissen konform äquivalent, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß $\langle\ ,\ \rangle = \lambda\langle\ ,\ \rangle'$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß es eine bijektive Abbildung gibt zwischen der Menge der konformen Äquivalenzklassen auf einem orientierten, zweidimensionalen Vektorraum V und der Menge der fast komplexen Strukturen auf V, die die gegebene Orientierung induzieren.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), daß jede orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) der (reellen) Dimension 2 eine natürliche fast komplexe Struktur besitzt. Benutzen Sie den Satz von Newlander und Nirenberg, um zu zeigen, daß jede fast komplexe Struktur auf (M, g) durch eine komplexe Struktur induziert wird.

12. S^2 als komplexe Mannigfaltigkeit

(a) (2 Punkte) Benutzen Sie die stereographische Projektion um zu zeigen, daß S^2 mit einer komplexen Struktur versehen werden kann.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}^1$ diffeomorph zu der 2–Sphäre S^2 ist. Vergleichen Sie die fast komplexe Struktur auf S^2 gegeben durch Aufgabe 11(c) mit der natürlichen komplexen Struktur auf $\mathbb{P}^1$.

Abgabetermin: Mittwoch, 21. 05. 2014 um 12:00 Uhr.