Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 4

13. Rekonstruktion von Vektorbündeln aus ihren Übergangsabbildungen
(4 Punkte) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Weiter seien $\forall\, i,j \in I : T^{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ holomorphe Abbildungen mit $T^{ij}(p)T^{jk}(p) = T^{ik}(p)\ \forall\, p \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $i,j,k \in I$. Wir definieren $Z = \bigsqcup_{i\in I} U_i \times \mathbb{C}^r$ und führen eine Äquivalenzrelation zwischen $(p,v) \in U_i \times \mathbb{C}^r$ und $(q,w) \in U_j \times \mathbb{C}^r$ ein: $(p,v) \sim (q,w)$ genau dann, wenn $p = q \in U_i \cap U_j$ und $w = T^{ij}(p)v$. Schliesslich definieren wir $E = Z/\!\sim$. Ein Punkt in E wird mit $[(p,v)]$ bezeichnet. Dann haben wir eine Projektion $\pi : E \to X, [(p,v)] \mapsto p$ und Abbildungen $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r, e \mapsto (p,v)$, falls $(p,v) \in U_i \times \mathbb{C}^r \subset Z$ ein Repräsentant von e ist. Zeigen Sie:

   (a) (3 Punkte) E ist ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r.

   (b) (1 Punkt) Sei E' ein holomorphes Vektorbündel mit Kozykeln $\{U_i, T^{ij}\}_{i,j\in I}$ dann ist $E \cong E'$ (biholomorph).

14. Determinantenbündel

   (a) (2 Punkte) Es sei E ein Vektorbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit X gegeben durch die Kozykel $\{(U_i, T^{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))\}$. Zeigen Sie, daß gilt: Das Determinantenbündel $\det E = \bigwedge^r E$ ist das holomorphe Vektorbündel über X, das durch die Kozykel $\det T^{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}), x \mapsto \det(T^{ij}(x))$ gegeben ist.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es für jedes holomorphe Vektorbündel E vom Rang r eine nicht–ausgeartete Paarung
$$\bigwedge^k E \times \bigwedge^{r-k} E \to \det E$$
gibt. Leiten Sie daraus die Existenz eines natürlichen Isomorphismus von holomorphen Vektorbündeln $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{r-k} E^* \otimes \det E$ ab.

15. Es sei
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0 \qquad (*)$$
eine kurze exakte Sequenz von holomorphen Vektorbündeln, wobei L ein Geradenbündel sei. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (1 Punkt) ($*$) induziert einen Isomorphismus $\det E \cong \det F \otimes L$ von holomorphen Vektorbündeln.

(b) (1 Punkt) ($*$) induziert eine kurze exakte Sequenz $0 \to F^* \to E^* \to L^* \to 0$ von holomorphen Vektorbündeln.

(c) (1 Punkt) ($*$) induziert injektive Abbildungen $L \otimes \bigwedge^{i-1} F \to \bigwedge^i E$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, von holomorphen Vektorbündeln.

(d) (1 Punkt) Für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ wird durch ($*$) die kurze exakte Sequenz

$$0 \to L \otimes \bigwedge^{i-1} F \to \bigwedge^{i} E \to \bigwedge^{i} F \to 0$$

induziert. Betrachten Sie dazu den Quotienten der Abbildung aus Aufgabe (c).

16. Vektorbündel auf $\mathbb{P}^1$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}(2)$.

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{f} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{g} \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0.$$

mit $f : \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}, (\ell, z) \mapsto z$ für $z \in \ell$. Zeigen Sie, daß dies eine kurze exakte Sequenz holomorpher Vektorbündel ist, und bestimmen Sie die Abbildung g.

Abgabetermin: Mittwoch, 28. 05. 2014 um 12:00 Uhr.