Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

# Übungsblatt 5

17. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß es zu jeder fast komplexen Struktur höchstens eine komplexe Struktur gibt, die diese induziert.

    (b) (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für einen holomorphen Bündelhomomorphismus $\phi : E \to F$ zwischen holomorphen Vektorbündeln $E$, $F$ über einer komplexen Mannigfaltigkeit $X$, so daß $\ker(\phi)$ kein holomorphes Vektorbündel definiert.

18. Garben holomorpher Funktionen
    Es sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.

    (a) (2 Punkte) Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ definieren wir $\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist holomorph}\}$. Zeigen Sie, daß dies eine lokal freie Garbe $\mathcal{O}_X$ von $\mathcal{O}_X$–Moduln vom Rang 1 definiert.

    (b) (2 Punkte) Es sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $X$. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ sei $i_*\mathcal{O}_Y(U) := \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$, wobei $\mathcal{O}_Y(\emptyset) = \{0\}$. Zeigen Sie, daß dies eine Garbe $i_*\mathcal{O}_Y$ von $\mathcal{O}_X$–Moduln definiert, die nicht lokal frei ist.

19. Schnitte eines holomorphen Vektorbündels
    Es seien $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang $r$ auf $X$ mit Kozykeln $\{U_i, T^{ij}\}$. Die zugehörigen lokalen Trivialisierungen seien mit $\psi_i : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^r$ bezeichnet. Weiter seien lokale Schnitte $s_i \in \Gamma(U_i, E)$ durch ihre lokalen Darstellungen $(\psi_i \circ s_i)(x) = (x, \sigma_i(x))$ gegeben, so daß gilt: $\sigma_i(x) = T^{ij}(x)\sigma_j(x), \forall\, x \in U_i \cap U_j$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) $\{s_i\}_{i \in I}$ definiert einen globalen Schnitt $s \in \Gamma(X, E)$ mit $s|_{U_i} = s_i \,\forall\, i \in I$.

    (b) (2 Punkte) Falls $s_i(x) \neq 0,\ \forall\, x \in U_i, i \in I$, dann gibt es ein holomorphes Vektorbündel $F$ vom Rang $r-1$ und ein holomorphes Geradenbündel $L$, so daß $E = F \oplus L$.

20. Normalenbündel
    (4 Punkte) Es sei $Y \subset X$ eine $m$–dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit einer

$n$–dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $X$. $X$ sei mit einem an $Y$ angepassten holomorphen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ versehen. Zeigen Sie, daß die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial z_{(i)}^{m+1}}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{(i)}^{n}}|_x \in T_x^{1,0}U_i$ für $x \in Y \cap U_i$ eine lokale Trivialisierung für $\mathcal{N}_{Y/X}(x)$ induzieren. Benutzen Sie dazu die Beschreibung des Normalenbündels durch Kozykel.

Abgabetermin: Mittwoch, 04. 06. 2014 um 12:00 Uhr.