Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

Übungsblatt 6

21. Es seien X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n, und $Y \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, die lokal in $U \subset X$ durch holomorphe Funktionen $f^1, \ldots, f^{n-k}$ gegeben sei (d.h. 0 ist ein regulärer Wert der Abbildung $(f^1, \ldots, f^{n-k}) : U \to \mathbb{C}^{n-k}$ und Y ist dessen Urbild.). Die lokalen Koordinaten in U seien mit $(z^1, \ldots, z^n)$ bezeichnet.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $(z^1, \ldots, z^k, f^1, \ldots, f^{n-k})$ als an Y angepasstes Koordinatensystem gewählt werden kann (gegebenenfalls nach geeigneter Umnummerierung der z^i).

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Funktionen $f^1, \ldots, f^{n-k}$ für $x \in U \cap Y$ in natürlicher Weise eine Basis von $\mathcal{N}^*_{Y/X}|_x$ induzieren. Benutzen Sie dazu die Abbildung $\frac{\partial}{\partial z^i} \mapsto \frac{\partial f^j}{\partial z^i}$ für $i = k+1, \ldots, n$.

    (c) (2 Punkte) Es bezeichne $\mathcal{I}_Y(U)$ den Vektorraum aller holomorphen Funktionen auf $U \subset X$, die auf $Y \cap U$ verschwinden (dies definiert eine Garbe $\mathcal{I}_Y$). Zeigen Sie, daß die Einschränkung holomorpher Funktionen eine natürliche surjektive Abbildung $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ definiert, und daß die Sequenz

    $$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

    exakt ist. Zeigen Sie damit und mit Hilfe von (a), daß es einen natürlichen Garbenisomorphismus $\mathcal{H}^0(Y, \mathcal{N}^*_{Y/X}) \cong \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$ gibt. Dabei bezeichne $\mathcal{I}_Y^2$ die Garbe der holomorphen Funktionen, die auf Y eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung haben.

22. Es sei mit den Bezeichnungen wie in Aufgabe 21 $X = \mathbb{P}^2$, $Y_\psi = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 | f := \psi_0 \left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 3\psi_1 xyz = 0\}$, $[\psi_0 : \psi_1] \in \mathbb{P}^1$.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Menge $\Delta \subset \mathbb{P}^1$, so daß für $\psi \in \Delta$ Y_ψ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^2$ ist. Geben Sie eine geometrische Beschreibung von Y_ψ für $\psi \in \Delta$.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung der Adjunktionsformel, daß $\mathcal{N}_{Y_\psi/X} \cong \mathcal{O}(n)|_{Y_\psi}$ und bestimmen Sie n.

23. Globale Schnitte

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die globalen holomorphen Schnitte des trivialen Vektorbündels über $\mathbb{P}^n$.

(b) (3 Punkte) Es sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X. Zeigen Sie, daß L genau dann trivial ist, wenn L und sein Duales L^* nicht–triviale globale Schnitte besitzen. Konstruieren Sie dazu einen nicht–trivialen Schnitt von $\mathcal{O} \cong L \otimes L^*$ aus nicht–trivialen Schnitten von L und L^*.

24. (4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}(-p)^{\oplus\binom{n+1}{p}} \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 18. 06. 2014 um 12:00 Uhr.