Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

Übungsblatt 7

25. Hermitesche Metriken
(4 Punkte) Es sei (M, g, I) eine fast komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß es eine Hermitesche Struktur (M, h) gibt.

26. Oskulation der Fundamentalform

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung der Kählereigenschaften, daß $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\left(1+|z|^2\right) \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathbb{C})$ die Fundamentalform einer kompatiblen Metrik auf $\mathbb{C}$ mit der standard komplexen Struktur ist, die in jedem Punkt zu zweiter Ordnung zur Standardmetrik oskuliert.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie dasselbe für die $(1,1)$–Form $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\left(1-|z|^2\right)$ auf einem Polyzylinder $B_1 \subset \mathbb{C}$.

27. Integrabilität und Kählerbedingung.
Es sei (M, J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Es sei h eine mit J kompatible Riemannsche Metrik auf M und ∇ der Levi–Civita–Zusammenhang von h. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (2 Punkte) Falls $\nabla J = 0$ ist, dann ist der Nijenhuis–Tensor $N = 0$.

   (b) (2 Punkte) J ist genau dann integrabel, falls $(\nabla_{JX} J)\, Y = J(\nabla_X J)Y$, $\forall\, X, Y \in \Gamma(M, TM)$.

28. Hodge–Stern– und Laplace–Operator
Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir definieren das invariante Volumenelement $\mathrm{vol}_g \in \Omega^n(M)$ in lokalen Koordinaten (U, ϕ) durch $\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) vol_g ist wohldefiniert und stimmt mit der Definition aus der Vorlesung überein.

   (b) (1 Punkt) Die von g auf T^*M induzierte Metrik g^* ist in lokalen Koordinaten durch $(g^*)^{ij} = \left(g^{-1}\right)^{ij}$ gegeben.

(c) (1 Punkt) Der Hodge–Stern–Operator $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ ist in lokalen Koordinaten durch

$$* \left(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right) = \frac{\sqrt{\det g}}{(n-k)!} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} (g^*)^{i_1 j_1} \ldots (g^*)^{i_k j_k}\, \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} \mathrm{d}x^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_n}$$

gegeben, wobei $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_n)$.

(d) (1 Punkt) Der Laplace–Operator auf Funktionen $\Delta : \Omega^0(M) \to \Omega^0(M)$ ist durch

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det g}\, (g^*)^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right), f \in \Omega^0(M)$$

gegeben und stimmt mit der Definition $\Delta = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$ überein

Abgabetermin: Mittwoch, 25. 06. 2014 um 12:00 Uhr.