Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg



# Übungsblatt 8

29. Fubini–Study–Form
Es sei $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ mit der Standardeinbettung $(z^0, \dots, z^{n-1}) \mapsto (z^0, \dots, z^{n-1}, 0)$. Betrachten Sie die induzierte Einbettung $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) Die Einschränkung der Fubini–Study Kählerform $\omega_{\mathrm{FS}}(\mathbb{P}^n)$ auf $\mathbb{P}^n$ liefert die Fubini–Study Kählerform auf $\mathbb{P}^{n-1}$.

    (b) (2 Punkte) $\int_{\mathbb{P}^n} \omega_{\mathrm{FS}}^n = 1$. Zeigen Sie dazu zunächst in jeder Standardkoordinatenumgebung $U_j = \{(\xi^0, \dots, \xi^n) \in \mathbb{P}^n \mid \xi^j \neq 0\}$ und mit Standardkoordinaten $z^1, \dots, z^n$ auf $U_j$, daß $\omega_{\mathrm{FS}}|_{U_j} = f_0\omega_0 + f_1\omega_1$ mit geeigneten Funktionen $f_0, f_1$, $\omega_0 = \sum_{k=1}^n \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\bar{z}^k$, $\omega_1 = \sum_{k,\ell=1}^n z^\ell \bar{z}^k \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\ell$ und zeigen Sie, daß $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$. Benutzen Sie weiter, daß bezüglich der Standardmetrik gilt: $\int_{S^{2n-1}} \mathrm{vol} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$.

30. Vertauschungsrelationen der Lefschetz–Operatoren
Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $2n$ versehen mit einer kompatiblen fast komplexen Struktur $I$. Betrachten Sie für die folgenden linearen Operatoren auf $\bigwedge^\bullet V^*$: den Lefschetz–Operator $L$, sein Duales $\Lambda$ und den Zähloperator $H$ mit $H\alpha = (k-n)\alpha$ für alle $\alpha \in \bigwedge^k V^*$.

    (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:
$$[H, L] = 2L, \qquad [H, \Lambda] = -2\Lambda, \qquad [L, \Lambda] = H$$
    Benutzen Sie für die dritte Gleichung eine Induktion nach der Dimension von $V$. Zeigen Sie dazu, daß es eine Zerlegung $V = W_1 \oplus W_2$ gibt, die mit dem Skalarprodukt und der fast komplexen Struktur in geeigneter Weise kompatibel ist, und beweisen Sie dann eine induzierte Zerlegung von $L$ und $\Lambda$.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die dritte Gleichung wie folgt verallgemeinert werden kann:
$$[L^i, \Lambda](\alpha) = i(k-n+i-1)L^{i-1}(\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in \bigwedge^k V^*$$

31. Die Lie–Algebra der Lefschetz–Operatoren
Eine Lie–Algebra ist ein Paar $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ bestehend aus einem Vektorraum $\mathfrak{g}$ und einer antisymmetrischen bilinearen Abbildung, der Lie–Klammer, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, welche die Jacobi–Identität $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ erfüllt.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß der Raum $\mathfrak{sl}_2$ der spurlosen reellen $2 \times 2$ Matrizen mit der durch das Matrixprodukt induzierten Lie–Klammer $[A, B] = AB - BA$, $A, B \in \mathfrak{sl}_2$, eine Lie–Algebra definiert.

(b) (1 Punkt) Es seien $V, L, \Lambda, H$ wie in Aufgabe 30. Zeigen Sie, daß der von $L, \Lambda, H$ erzeugte Unterraum von $\mathrm{End}(\bigwedge^\bullet V^*)$ mit den Relationen aus Aufgabe 30 (a) eine Lie–Algebra definiert.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathrm{End}(\bigwedge^\bullet V^*)$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2$ trägt, d.h. daß es einen Homomorphismus von Lie–Algebren $\mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\bigwedge^\bullet V^*)$ gibt.

32. Harmonische Formen

(a) (2 Punkte) Sei $(X, g)$ eine kompakte hermitesche Mannigfaltigkeit und sei $[\alpha] \in \mathrm{H}^{p,q}(X)$. Zeigen Sie, daß der $\bar{\partial}$–harmonische Repräsentant der Klasse $[\alpha]$ die eindeutige $\bar{\partial}$–geschlossene Form mit minimaler $\mathrm{L}^2$–Norm $\|\alpha\|$ ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß holomorphe Formen, d.h. Elemente aus $\mathrm{H}^0(X, \Omega^p)$ auf einer Kählermannigfaltigkeit $X$ harmonisch bezüglich einer beliebigen Kählermetrik sind.

Abgabetermin: Mittwoch, 02. 07. 2014 um 12:00 Uhr.