Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Aspekte der komplexen Geometrie
SS 14

Übungsblatt 9

33. Hodge–Zerlegung des komplexen Torus
Es sei X der Quotient $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$, wobei $\mathbb{Z}^{2n} \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ die natürliche Inklusion ist und durch Translationen auf $\mathbb{C}^n$ operiert.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit ist.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $h^{p,q}(X) = \binom{n}{p}\binom{n}{q}$, für $0 \leq p, q \leq n$.

    (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie das χ_y–Geschlecht von X und leiten Sie daraus die Eulerzahl, die Signatur und das arithmetische Geschlecht von X ab.

34. Signatur
Es sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß für die Signatur von X gilt:

    (a) (2 Punkte) $\sigma(X) = 0$, falls $\dim_{\mathbb{C}} X = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

    (b) (2 Punkte) $\sigma(X)$ hängt nur von den Hodge–Zahlen $h^{p,q}(X)$ mit geradem $p + q$ ab.

35. Invarianten von K3–Flächen
(4 Punkte) Für eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit X ist die Picardzahl $\rho(X)$ definiert durch $\rho(X) = \operatorname{rk}\operatorname{im}\big(\operatorname{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})\big)$. Es sei nun X eine K3–Fläche. Zeigen Sie, daß $b_2(X) = 22$ und $\rho(X) \leq 20$. Sie dürfen benutzen, daß $\mathrm{H}^k(X, \mathbb{R}) \cong \mathrm{H}^k(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

36. Divisoren
Es sei $Y \subset X$ eine glatte Hyperfläche in einer n–dimensionalen komplexen zusammenhängenden Mannigfaltigkeit. Es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Es seien $\mathcal{K}_X$ die Garbe der meromorphen Funktionen auf X, $\mathcal{K}_X^* \subset \mathcal{K}_X$ die Garbe der Schnitte, die nicht überall verschwinden.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß ein Schnitt $f \in \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ durch nicht–triviale meromorphe Funktionen $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$ gegeben ist, so daß $f_i f_j^{-1}$ eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion ist.

(b) (1 Punkt) Es sei $f \in \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$. Zeigen Sie, daß die Funktionen $\{T^{ij} := f_i f_j^{-1}\}$ ein holomorphes Geradenbündel definieren. Wir bezeichnen dieses mit $\mathcal{O}(Y)$, wobei $Y = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

(c) (1 Punkt) Es sei L ein holomorphes Geradenbündel auf X. Zeigen Sie, daß es eine kanonische Abbildung $\mathrm{H}^0(X, L) \setminus \{0\} \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ gibt. Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung.

(d) (1 Punkt) Es sei $s \in \mathrm{H}^0(X, L) \setminus \{0\}$, 0 ein regulärer Wert von s und Y die Nullstellenmenge von s. Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}(Y) \cong L$ und daß $\mathcal{O}(Y)|_Y \cong \mathcal{N}_{Y/X}$ als holomorphe Geradenbündel.

Abgabetermin: Mittwoch, 09. 07. 2014 um 12:00 Uhr.