Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung
in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 1

Ringe, Körper, Ideale

Alle Ringe im Folgenden sind Ringe mit Einselement.

1. Quotientenringe
   Es seien R ein Ring und $I \subset R$ ein zweiseitiges Ideal. Für $a, b \in R$ definieren wir eine Relation $a \sim b$ genau dann, wenn $a - b \in I$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren R/I als die Menge der Äquivalenzklassen $[a] := a + I := \{a + b \,|\, b \in I\}$.

   (b) (2 Punkte) Auf R/I definieren wir eine Addition $[a] + [b] := [a + b]$ und eine Multiplikation $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$. Zeigen Sie, daß $(R/I, +, \cdot)$ ein Ring ist.

   (c) (1 Punkt) Es sei $R = \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ ein Ringisomorphismus ist.

2. Quotientenkörper
   Es sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring. Wir definieren auf $M = R \times (R \setminus \{0\})$ eine Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann, wenn $ad = bc$. Es sei $Q = M/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen $\frac{a}{b} := [(a, b)]$. Wir definieren auf Q eine Addition $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$ und eine Multiplikation $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$.

   (a) (3 Punkte) Unter welcher Zusatzvoraussetzung an R ist $(Q, +, \cdot)$ ein Körper ? (Beweis) Q heisst dann Quotientenkörper oder Körper der Brüche von R.

   (b) (1 Punkt) Es sei R so, daß $(Q, +, \cdot)$ ein Körper ist. Zeigen Sie, daß die Abbildung $i : R \to Q, a \mapsto \frac{a}{1}$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

   Bemerkung: Die Konstruktion kann auf multiplikative Untermonoide S von R verallgemeinert werden, indem man mit $M = R \times S$ beginnt. Der resultierende Ring heisst dann Lokalisierung von R an S.

3. Maximale Ideale
   Es sei R ein kommutativer Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ heisst Primideal, falls $R/\mathfrak{p}$ ganz ist, d.h. ein Integritätsbereich ist. Ein Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ heisst maximal, falls für jedes Ideal $I \subsetneq R$ mit $\mathfrak{m} \subset I$ gilt: $\mathfrak{m} = I$. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

(b) (1 Punkt) $R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper.

(c) (2 Punkte) Ist $I \subset R$ ein Ideal, so daß R/I ein Körper ist, dann ist I maximal.

4. Radikale

Es seien R ein kommutativer Ring, $I \subset R$ ein Ideal. Wir definieren das Radikal von I durch
$$\sqrt{I} = \{a \in R \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}.$$
Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte) $\sqrt{I}$ ist ein Ideal in R.

(b) (1 Punkt) $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$, falls $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

(c) (1 Punkt) $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

Abgabetermin: Mittwoch, 29. April 2015 um 10:00 Uhr