PROF. DR. KATRIN WENDLAND
PD DR. EMANUEL SCHEIDEGGER
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

KOMMUTATIVE ALGEBRA UND EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE GEOMETRIE
SS 15

Übungsblatt 10

37. Es sei $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ gegeben durch $\varphi(t) = (t^4, t^5, t^6, t^7)$ und wir setzen $X = \varphi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})$.
    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß X die natürliche Struktur einer affinen Varietät über $\mathbb{C}$ trägt.
    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\dim X = 1$.
    (c) (1 Punkt) Berechnen Sie T_0X und folgern Sie, daß X nicht isomorph ist zu irgendeiner affinen Varietät $Y \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

38. (4 Punkte) Es sei $I = (xy, x^2 + z^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ und $Z = V(I) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.
    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von Z und deren Dimension.
    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Krull-Dimension von $\mathbb{C}[x, y, z]/I$.

39. Reguläre Funktionen auf $\mathbb{P}^1_k$
    (4 Punkte) Es seien $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ ein Ideal homogener Polynome, $Z = V_+(I) \subset \mathbb{P}^n_k$ (cf. Aufgabe 14). Eine rationale Funktion auf Z ist eine (nicht notwendigerweise überall definierte) Funktion $f : Z \dashrightarrow k$, $f = \frac{p}{q}$ für homogene Polynome $p, q \in k[x_0, \ldots, x_n]_d$. f heisst regulär in z, falls es $d \in \mathbb{N}$ und $p, q \in k[x_0, \ldots, x_n]_d$ gibt mit $f = \frac{p}{q}$ und $q(z) \neq 0$. Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, daß jede auf ganz $\mathbb{P}^1_k$ reguläre Funktion konstant ist. Wählen Sie dazu die Überdeckung aus Aufgabe 28 und bestimmen Sie dann die regulären Funktionen $f_i : U_i \to k$, die mit den Übergangsabbildungen g_{ij} aus Aufgabe 28(c) verträglich sind.

40. Faktorielle Ringe
    (4 Punkte) Es sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring R. R heisst faktoriell, falls jedes Element $0 \neq a \in R$ eine Darstellung $a = \varepsilon p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m}$ besitzt, wobei die p_i irreduzibel sind, ε eine Einheit und $(p_i) \neq (p_j)$ für $i \neq j$, so daß die Ideale (p_i) und die n_i bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. R heisst ganz abgeschlossen (oder normal), falls für jede ganze Erweiterung $R \subset R'$ (vgl. Bem. 2.9(1)) mit $R' \subset \mathrm{Quot}(R)$ gilt: $R = R'$. Zeigen Sie, daß ein faktorieller Ring ganz abgeschlossen ist.

Nehmen Sie dazu an, daß es $a, b \in R$ und ein irreduzibles Element $p \in R$ gibt, so daß $\frac{a}{b}$ ganz über R ist mit $p \mid b$. Schliessen Sie, daß dann p auch a teilen muss.

Abgabetermin: Mittwoch, 8. 7. 2015 um 11:30 Uhr.