Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 11

41. Dimension einer singulären Varietät
Es sei $Z = V(xy + z^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

    (a) (2 Punkte) Es sei $\mathfrak{m}_p = I(\{p\}) \subset \mathbb{C}[Z]$ das maximale Ideal von $p = (\xi, \eta, \zeta) \in Z$. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ an.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß jede Primidealkette in $k[Z]$, die nicht weiter verfeinert werden kann, die Länge 2 hat. (Dabei sind die Konventionen aus der Vorlesung für die Länge einer Primidealkette gemeint.)

    Gehen Sie dazu wie in Aufgabe 32 vor.

42. Es sei $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n \subset \mathbb{A}^m_k$ eine reduzible, affine Varietät über einem Körper k. Es sei $\mathfrak{p}_j = I(Z_j) \subset k[\mathbb{A}^m_k]$ das Primideal der irreduziblen Komponente Z_j, $j = 1, \ldots, n$. Weiter setzen wir $\widetilde{R} = k[Z]$, $\widetilde{\mathfrak{p}}_j = \mathfrak{p}_j/I(Z)$

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $k(Z_j) = \widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}/\widetilde{\mathfrak{m}}_j$, wobei $\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ das maximale Ideal in $\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}$ ist. ($R_\mathfrak{p}$ wurde in Aufgabe 36 definiert.) Zeigen Sie dazu, daß die Abbildung $\widetilde{R} \to \widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}/\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ auf zwei Arten faktorisiert: $\widetilde{R} \hookrightarrow R_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j} \twoheadrightarrow \widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}/\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ und $\widetilde{R} \twoheadrightarrow k[Z_i] \hookrightarrow \widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}/\widetilde{\mathfrak{m}}_j$

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\text{K-dim}\,(\widetilde{R}) = \max_j\{\operatorname{trdeg}_k(k(Z_j))\}$.

43. Es seien k ein Körper, K eine algebraische Körpererweiterung von k, $x \in K$. Es sei $k(x) \subset K$ der kleinste Unterkörper von K, der sowohl k als auch x enthält.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $k(x) = k[x]$, und daß $k(x)$ endlich über k ist.

    (b) (2 Punkte) Der Grad $\deg k(x)$ von $k(x)$ ist definiert als die Dimension von $k(x)$ als k-Vektorraum. Es sei p das Minimalpolynom von x über k, d.h. ein monisches Polynom $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ minimalen Grades $n = \deg p$ mit $a_i \in k$ und $p(x) = 0$. Zeigen Sie, daß p eindeutig ist, und daß $\deg k(x) = \deg p$.

    (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Minimalpolynom, welches den Restklassenring von $\mathbb{F}_2[x]$ zum Körper mit 4 Elementen erweitert.

44. Es seien k ein Körper, $V = k^{n+1}$. Eine irreduzible, algebraische Teilmenge $W \subset \mathbb{P}^n$, d.h. $W = V_+(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$, versehen mit der Quotiententopologie heisst projektive Varietät (cf. Aufgabe 14). Für projektive Varietäten Y, Z definieren wir einen Morphismus als stetige Abbildung $\varphi : Y \to Z$, so daß für alle $z \in Z$, und alle offene Umgebungen $U \ni z$, und regulären $f : U \to \mathbb{A}^1_k$ der Rückzug $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ von f unter φ wieder regulär ist (cf. Aufgaben 33 und 39). Der Morphismus φ ist ein Isomorphismus, falls ein Morphismus $\psi : Z \to Y$ existiert, so daß $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Z$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$.
Weiter sei $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der linearen Transformationen von V, $Z(V) = \{\lambda \mathbb{1} \in \mathrm{GL}(V) \mid \lambda \in k^*\}$. Wir definieren die projektiv lineare Gruppe $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/Z(V)$ und die Wirkung $\varphi : \mathrm{PGL}(V) \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ durch $(g, [x]) \mapsto [gx]$ mittels Matrix-Vektor-Multiplikation mit $x \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ und $\varphi^* : \mathrm{PGL}(V) \times k[x_0, \dots, x_n] \to k[x_0 \dots, x_n]$ durch $(g, f) \mapsto f \circ g$. Im folgenden seien $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal und $g \in \mathrm{PGL}(V)$ fest. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) Die Wirkung φ auf $\mathbb{P}^n$ und auf $W = V_+(I)$ ist wohldefiniert.

(b) (2 Punkte) Die Abbildung $\varphi_g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, [x] \mapsto \varphi(g, [x]) = [gx]$ ist ein Isomorphismus von Varietäten.

(c) (1 Punkt) Die projektiven Varietäten $W = V_+(I)$ und $W' = V_+(\varphi_g^*(I))$ sind isomorph, wobei $\varphi_g^*(f) = f \circ g$ für $f \in I$.

Bemerkung:

Die Isomorphieklassen kubischer Kurven in $\mathbb{P}^2$ (also affiner Varietäten der Form $V_+(f) \subset \mathbb{P}^2$ mit $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3$) bilden eine Ein-Parameter-Schar, was man folgendermaßen sehen kann: $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3$ ist ein 10-dimensionaler komplexer Vektorraum, während Matrizen in $\mathrm{PGL}(V)$ genau $3^3 - 1 = 8$ unabhängige Parameter haben. Weil für jedes $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3$ und $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt: $V_+(f) = V_+(\lambda f)$, und für $g \in \mathrm{PGL}(V)$ nach (c) die kubischen Kurven $V_+(f)$ und $V_+(\varphi_g^*(f))$ isomorph sind, bleiben $10 - 8 - 1 = 1$ Parameter für die Isomorphieklassen kubischer Kurven in $\mathbb{P}^2$.

Abgabetermin: Mittwoch, 15. 7. 2015 um 11:30 Uhr.