Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 3

Hilbertscher Basissatz

9. Fano–Ebene
   Die Fano–Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$ ist die projektive Ebene über dem Körper $\mathbb{F}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Menge der Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$ so mit $P = \{0, 1, \ldots, 6\}$ identifiziert werden kann, daß $0 = (0 : 0 : 1), 1 = (0 : 1 : 0), 2 = (1 : 0 : 0)$ und daß die Menge der Geraden in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$ durch die Menge $G = \{g_i = \{i, i+2, i+3\} \bmod 7 \,|\, i \in P\}$ beschrieben wird. Zeichnen Sie eine Skizze dieser Geometrie, d.h. aller Punkte und aller Geraden mit deren Inzidenzen.
   (b) (1 Punkt) Ordnen Sie jeder Geraden $g_i \in G$ einen Punkt $p_i \in P$, und jedem Punkt $j \in P$ eine Gerade $h_j \in G$ so zu, daß gilt: $p_i \in h_j$ genau dann, wenn $g_i \ni j$. Zeigen Sie, daß diese Abbildung einen Isomorphismus $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}^2} \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}^2}$ beschreibt. (Dieser Isomorphismus ist nicht eindeutig.)
   (c) (2 Punkte) Geben Sie eine Begründung mittels linearer Algebra für die Existenz des Isomorphismus aus Aufgabe (b). Verallgemeinern Sie die Aussage auf $\mathbb{P}^n_k$, n, k beliebig.

10. Noethersche Ringe
   (a) (2 Punkte) Es seien R ein Noetherscher Ring, $\phi : R \to R'$ ein surjektiver Homomorphismus kommutativer Ringe. Zeigen Sie, daß R' Noethersch ist. Folgern Sie, daß für ein Ideal $I \subset R$ der Quotientenring R/I Noethersch ist.
   (b) (1 Punkt) Es seien R, S Ringe und $\varphi : S \to R$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß R damit die Struktur einer Algebra über S trägt.
   (c) (1 Punkt) Es sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k–Algebra. Zeigen Sie, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so daß $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Folgern Sie, daß A ein Noetherscher Ring ist.

11. Homogene Ideale
   (4 Punkte) Ein kommutativer Ring über einem Körper k heisst gradiert, falls $S =$

$\bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ (als additive Gruppe) und falls aus $F \in S_d, G \in S_e$ folgt, dass $FG \in S_{d+e}$. $F \in S_d$ wird als homogenes Element von S vom Grad d bezeichnet. Jedes $F \in S$, $F \neq 0$ kann eindeutig als (endliche) Summe $F = \sum_{d=0}^{\infty} F_d$, $F_d \in S_d$ geschrieben werden. Die nicht verschwindenden F_d heissen homogene Komponenten von F. Ein Ideal $I \subset S$ heisst homogen, falls für alle homogenen Komponenten F_d von $F \in I$ gilt: $F_d \in I$.
Zeigen Sie, daß I genau dann homogen ist, wenn I von homogenen Elementen erzeugt wird. Unter welcher Bedingung an S werden alle homogenen Ideale von endlich vielen Elementen erzeugt ? (Beweis)

12. Es sei $J = (xy, xz, yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

    (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $V(J)$. Ist $V(J)$ irreduzibel ?

    (b) (1 Punkt) Gilt $J = I(V(J))$?

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß J nicht durch 2 Elemente erzeugt werden kann.

    (d) (1 Punkt) Es sei nun $J' = \big(xy, (x-y)z\big)$. Bestimmen Sie $V(J')$ und berechnen Sie $\sqrt{J'}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 13. 5. 2015 um 10:00 Uhr.