Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 4

Nullstellensatz

13. Es seien R ein kommutativer Ring, $I, J \subset R$ Ideale.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Falls $\sqrt{I}$ endlich erzeugt ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\sqrt{I})^N \subset I$.

    (b) (2 Punkte) Es sei nun R Noethersch. Folgern Sie aus (a), daß $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $I^N \subset J$ und $J^N \subset I$.

    (c) (1 Punkt) Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $I, J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ Ideale. Zeigen Sie, daß $V(I) = V(J)$ genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $I^N \subset J$ und $J^N \subset I$.

14. Projektiv algebraische Mengen
    (4 Punkte) Es seien k ein Körper, $I \subseteq k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Wir definieren

    $$V_+(I) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_k \mid F(x_0, \ldots, x_n) = 0 \,\forall\, F \in I, F \text{ homogen } \}.$$

    Es sei nun I so, daß $V_+(I) \neq \emptyset$ und wir setzen $Y = V(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}_k$. Zeigen Sie, daß Y eine (im allgemeinen unendliche) Vereinigung von Geraden im $\mathbb{A}^{n+1}_k$ ist, und daß diese Geraden genau die Punkte von $V_+(I)$ sind.

15. Projektiver Nullstellensatz
    Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\pi : k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k$ die Projektion aus Aufgabe 7 und $W \subset \mathbb{P}^n_k$ eine Teilmenge. Wir definieren $I(W) = I(\pi^{-1}(W)) \subset k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Weiter sei $J \subseteq k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal, und es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 14. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) $I(W)$ ist ein homogenes Ideal.

    (b) (1 Punkt) Falls $V_+(J) = \emptyset$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $(x_0, \ldots, x_n)^N \subseteq J$, d.h. $\sqrt{J} = (1)$ oder $\sqrt{J} = (x_0, \ldots, x_n)$.

    (c) (2 Punkte) Falls $V_+(J) \neq \emptyset$, dann $I(V_+(J)) = \sqrt{J}$.

Das Ideal $(x_0, \ldots, x_n)$ heisst wegen (b) irrelevantes Ideal.

16. Irreduzibilität
    Es sei R ein Ring, dann heisst $a \in R$ irreduzibel, falls aus $a = bc$, $b, c \in R$ folgt, daß entweder b oder c eine Einheit ist.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $f = y^2 - (x-1)x(x+1) \in k[x, y]$ für jeden Körper k irreduzibel ist.
    Nehmen Sie dazu an, daß $f = gh$ in $(k[x])[y]$ nicht irreduzibel ist. Bestimmen Sie erst die möglichen Grade von g und h in y, und dann die Teilbarkeitseigenschaften der Koeffizienten von g und h, um zu einem Widerspruch zu gelangen. (Dies ist im Wesentlichen der Beweis des Eisensteinschen Kriteriums für Irreduzibilität.)

    (b) (2 Punkte) Nach Aufgabe (a) ist also $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ irreduzibel. Zeichnen Sie eine Skizze von $V(f)$.

Abgabetermin: Mittwoch, 20. 5. 2015 um 11:30 Uhr.