Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 6

Topologie und affine Varietäten

21. Quotiententopologie
Es seien X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathcal{O} = \{V \subset Y | f^{-1}(V) \subset X \text{ offen } \}$ eine Topologie auf Y definiert. Diese Topologie heisst die durch f induzierte Topologie. Es seien $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $Y = X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Folgern Sie, daß Y auf natürliche Art und Weise mit einer Topologie versehen werden kann. Diese Topologie heisst Quotiententopologie.

   (b) (2 Punkte) Wir versehen k^{n+1} mit der Zariski-Topologie und verwenden die Bezeichnungen aus den Aufgaben 7 und 14. Zeigen Sie, daß $W \subset \mathbb{P}^n_k$ genau dann bezüglich der Quotiententopologie abgeschlossen ist, wenn W bezüglich der Zariski-Topologie auf dem $\mathbb{P}^n_k$ abgeschlossen ist, d.h. $W = V_+(I)$ für ein Ideal $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ homogener Polynome.

22. Quasikompaktheit
Ein topologischer Raum X heisst quasikompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß alle algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^n_k$ quasikompakt sind. Formulieren Sie dazu Quasikompaktheit mittels abgeschlossener Mengen.

   (b) (2 Punkte) Es seien $X \subset \mathbb{A}^n_k$ eine affine Varietät, und $D(f) = X \cap (\mathbb{A}^n_k \setminus V(f))$, $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ die sogenannten Standard offenen Mengen. Zeigen Sie, daß jede offene Teilmenge von X eine Vereinigung endlich vieler $D(f)$ ist. (Dies ist äquivalent zu Quasikompaktheit.)

23. Koordinatenring eines Polynoms
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $f \in k[x]$ mit $V(f) \neq \emptyset$. f habe m Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, die paarweise verschieden sind.

   (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $Z = V(f)$ und $I(Z) = \sqrt{(f)}$.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß für den Koordinatenring $k[Z]$ gilt: Es gibt einen k-Algebren-Isomorphismus $k[Z] \cong k^m, [p(x)] \mapsto (p(\alpha_1), \ldots, p(\alpha_m))$.
Zeigen Sie dazu, daß diese Abbildung ein k-Vektorraum-Isomorphismus ist, indem Sie Polynome $f_i \in k[x], i = 1, \ldots, m$, mit der Eigenschaft finden, daß $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist. Benutzen Sie diese Polynome, um die Algebrenstruktur explizit anzugeben, d.h. drücken Sie $f_i f_j \in k[Z]$ als k-Linearkombination der f_i aus. Bestimmen Sie das bezgl. Multiplikation neutrale Element der k-Algebra k^m.

24. Morphismen von Varietäten
Es seien $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3 + {x_2}^5 + {x_3}^7$ und $g(x_0, x_1, x_2, x_3) = {x_0}^3 + {x_0}^2 x_1 + x_0 {x_2}^2 + {x_3}^3$. Weiter seien $Y \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}, Z \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ mit $Y = V(f, g), Z = V(f)$.

(a) (1 Punkt) Konstruieren Sie einen natürlichen, injektiven $\mathbb{C}$-Algebren-Homomorphismus $\Phi : \mathbb{C}[Z] \to \mathbb{C}[Y]$, und zeigen Sie, daß $\mathbb{C}[Y]$ eine natürliche Struktur einer endlichen $\mathbb{C}[Z]$-Algebra trägt.

(b) (2 Punkte) Konstruieren Sie den Morphismus $\varphi : Y \to Z$ mit $\varphi^* = \Phi$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß der Morphismus φ aus (b) surjektiv ist, und daß jedes $z \in Z$ unter φ nur endlich viele Urbilder hat.

Abgabetermin: Mittwoch, 10. 6. 2015 um 11:30 Uhr.