Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 7

Affine und projektive Varietäten

25. Lokalisierung und Primideale
Es seien $R \neq 0$ ein Integritätsbereich und $S \neq \emptyset$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, d.h. $0 \notin S$ und aus $a, b \in S$ folgt $ab \in S$. Es sei $i : R \hookrightarrow R[S^{-1}]$ der injektive Ringhomomorphismus $i : r \mapsto \frac{ra}{a}$ für beliebige $a \in S$.

   (a) (1 Punkt) Es seien $a \in R$, $a \neq 0$ und $S_a := \{1, a, a^2, \dots\}$, dann definieren wir $R[a^{-1}] := R[S_a^{-1}]$. Zeigen Sie, daß $R[a^{-1}] \cong R[x]/(ax - 1)$.

   (b) (1 Punkt) Es sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, daß $I[S^{-1}] = \left\{ \frac{f}{g} \in R[S^{-1}] \;\middle|\; f \in I, g \in S \right\}$ ein Ideal in $R[S^{-1}]$ ist.

   (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Primideale von } R[S^{-1}]\} & \leftrightarrow & \{\text{Primideale } I \subset R, I \cap S = \emptyset\} \\ J & \mapsto & i^{-1}J \\ I[S^{-1}] & \mapsfrom & I \end{array}$$

   zueinander inverse Bijektionen sind.

26. Koordinatenring eines Polynoms
(4 Punkte) Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $f \in k[x]$ mit m paarweise verschiedenen Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $Z = V(f)$ und $k[Z] \cong k^m$ wie in Aufgabe 23. Bestimmen Sie alle maximalen Ideale von k^m mit dieser k-Algebrenstruktur. Verwenden Sie dazu den Nullstellensatz und betrachten Sie die Einheiten in k^m.

27. Surjektive Morphismen affiner Varietäten
Es sei $X = V(x_1x_2 - 1) \subset \mathbb{A}^2_k$, k ein Körper.

   (a) (1 Punkt) Es seien $\pi_i : X \to \mathbb{A}^1_k, (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_i, i = 1, 2$ die Projektionen von X auf die Achsen. Zeigen Sie, daß $k[X]$ als $k[x_1]$-Modul nicht endlich erzeugt ist, d.h. daß π_i kein endlicher Morphismus ist.

(b) (3 Punkte) Es sei $\varphi : X \to \mathbb{A}^1_k, (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 + \lambda_2$. Zeigen Sie: Falls k algebraisch abgeschlossen ist, ist φ ein endlicher, surjektiver Morphismus.

28. Überdeckung des projektiven Raums
Es seien $\mathbb{P}^n_k$, $U_i, i = 0, \ldots, n$ wie in den Aufgaben 7 und 21 und $\pi : \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k, (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \cdots : x_n]$. Weiter versehen wir U_i mit der Struktur einer affinen Varietät über k, so daß $\varphi_i : U_i \cong \mathbb{A}^n_k$ aus Aufgabe 7(c) ein Isomorphismus affiner Varitäten ist.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $k[U_i] \cong k[t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n]$ mit $t_j = x_j/x_i$, $j = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ (cf. Aufgabe 7(c)) und daß $\pi^{-1}(U_i)$ mit der Struktur einer affinen Varietät über k versehen werden kann, so daß $k[\pi^{-1}(U_i)] \cong (k[x_0, \ldots, x_n])[x_i^{-1}]$ (cf. Aufgabe 25).

(b) (1 Punkt) Es sei ψ_i die Einschränkung von π auf $\pi^{-1}(U_i)$. Zeigen Sie, daß $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i$ ein Morphismus affiner Varietäten ist.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Übergangsabbildungen $g_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Abgabetermin: Mittwoch, 17. 6. 2015 um 11:30 Uhr.