Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 1

1. a) (1 Punkt) Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} [0] & [4] & [3] \\ [3] & [1] & [1] \\ [2] & [2] & [3] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{F}_5}(3 \times 3)$$

mit dem Gaußalgorithmus.

b) (3 Punkte) Sei K ein Körper. Nutzen Sie den Gaußalgorithmus, um das Inverse einer allgemeinen (2×2)-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(2 \times 2)$$

zu bestimmen, wenn es existiert. Finden Sie dabei eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Einträge a, b, c, d für die Existenz des Inversen.
Tipp: Machen Sie zunächst eine Fallunterscheidung nach $a \neq 0$ und $a = 0$ und führen die Ergebnisse am Schluss zusammen.

2. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Für eine Untergruppe H von G definieren wir zwei Äquivalenzrelationen

$$L := \{(a, b) \in G \times G \mid b^{-1} * a \in H\},$$
$$R := \{(a, b) \in G \times G \mid a * b^{-1} \in H\}.$$

(Für R haben Sie bereits bewiesen, dass das eine Äquivalenzrelation ist. Für L dürfen Sie es ohne Beweis benutzen.)
Für ein Element $g \in G$ bezeichne $g * H$ oder gH die Äquivalenzklasse von g bzgl. L und $H * g$ oder Hg die Äquivalenzklasse von g bzgl. R.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie:

$$(\forall g \in G \colon g * H = H * g) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall g \in G \colon \forall h \in H \colon g * h * g^{-1} \in H)$$

b) (2 Punkte) Sei jetzt $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $G = S_n$, die Gruppe der Permutationen von n Elementen, und $H = A_n := \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$.
Geben Sie für $G = S_3$ und $H = A_3$ alle Äquivalenzklassen bzgl. L an

oder

zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\sigma \in S_n$:

$$\sigma A_n = \{\tau \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\} = A_n \sigma.$$

3. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.
Erinnern Sie sich daran, dass es zu jeder Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V eine DUALE BASIS $\mathcal{A}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ des Dualraums V^* und einen durch die Wahl der Basis $\mathcal{A}$ induzierten Isomorphismus $D_{\mathcal{A}} \colon V \to V^*$ gibt.

   a) (2 Punkte) Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ und $\alpha = D_{\mathcal{A}}(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) \in V^*$. Was ist dann die darstellende Matrix von α bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ von V und (1) von K?

   b) (2 Punkte) Was ist die darstellende Matrix von $D_{\mathcal{A}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^*$?

4. Sei K ein Körper. In Aufgabe 43 in „Lineare Algebra I“ wurde für quadratische Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ die DETERMINANTE

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

eingeführt.

   a) (2 Punkte) Schreiben Sie $\det(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   aus, indem Sie die Summation über $\sigma \in S_n$ explizit ausführen.
   Zeigen Sie, dass in beiden Fällen $\det(A) = 0$, falls zwei Spalten von A gleich sind.

   b) (2 Punkte) Wir definieren die einfache Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{col}\colon & \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n\text{-mal}} & \to & \mathrm{Mat}_K(n \times n) \\ & \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{array}$$

   Zeigen Sie nun: Die Abbildung $\det \circ \mathrm{col}$ ist MULTILINEAR: Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jede Wahl von Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in K^n$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} K^n & \to & K \\ x & \mapsto & (\det \circ \mathrm{col})(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \end{array}$$

   linear.

Abgabetermin: Donnerstag, 28. April 2016 um 08:00 Uhr