Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 11

Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt zu dieser Vorlesung.

Bemerkung: Auf diesem Blatt sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

41. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und seien V und W n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.
Zeigen Sie:

    a) (2 Punkte) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ein Skalarprodukt auf V und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ ein Skalarprodukt auf W, so gibt es einen $\mathbb{K}$-Vektorraum-Isomorphismus $F\colon V \to W$, der mit den Skalarprodukten verträglich ist, also

    $$\forall v, v' \in V\colon \quad \langle F(v), F(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V.$$

    Ist der Isomorphismus eindeutig?

    b) (1 Punkt) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ ein Skalarprodukt auf W und $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gibt es eine symmetrische Bilinearform bzw. Hermitesche Sesquilinearform s_V auf V mit

    $$\forall v, v' \in V\colon \quad s_V(v, v') = \langle F(v), F(v') \rangle_W.$$

    s_V ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn F injektiv ist.
    Ist das Skalarprodukt dann eindeutig?

    c) (1 Punkt) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ein Skalarprodukt auf V und $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gibt genau dann ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ auf W mit

    $$\forall v, v' \in V\colon \quad \langle F(v), F(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V,$$

    wenn F injektiv ist. Ist das Skalarprodukt dann eindeutig?

    Bemerkung: In den Aufgabenteilen b) und c) wird die Voraussetzung $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$ nicht unbedingt gebraucht. Ändert sich das Ergebnis, wenn $\dim_{\mathbb{K}}(V) \neq \dim_{\mathbb{K}}(W)$?

42. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Zeigen Sie:

    a) (1 Punkt) Sind f und g selbstadjungiert, so gilt:

    $$f \circ g \text{ selbstadjungiert} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ und } g \text{ kommutieren (also } f \circ g = g \circ f).$$

b) (1 Punkt) Ist $f \circ f = \mathrm{id}_V$, so gilt:

$$f \text{ selbstadjungiert} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ orthogonal.}$$

c) (2 Punkte) Ist f selbstadjungiert und nilpotent (also $f^m := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ Mal}} = 0$ für ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), so ist $f = 0$.

43. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ diagonalisierbar.
Zeigen Sie:

a) (2 Punkte) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V, sodass F normal ist.

b) (1 Punkt) Sind alle Eigenwerte von F reell, dann ist F bezüglich des Skalarproduktes aus a) selbstadjungiert.

Oder:

Haben alle Eigenwerte von F Betrag 1, dann ist F bezüglich des Skalarproduktes aus a) orthogonal bzw. unitär.

c) (1 Punkt) Sind alle Eigenwerte von F rein imaginär (also von der Form bi mit $b \in \mathbb{R}$), dann ist $F^{\mathrm{ad}} = -F$ bezüglich des Skalarproduktes aus a).

Oder:

Sind 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von F, dann ist F eine orthogonale Projektion bezüglich des Skalarproduktes aus a).

44. Sei $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine positiv definite symmetrische bzw. Hermitesche Matrix.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Es gibt genau eine positiv definite symmetrische bzw. hermitesche Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ mit $AA = B$.
Tipp: Diagonalisieren und **Satz 6.3.2**.

b) (2 Punkte) Folgern Sie: B ist die Gramsche Matrix des Euklidischen Standardskalarprodukts bezüglich einer Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathbb{K}^n$. Ist diese Basis eindeutig?

Abgabetermin: Donnerstag, 14. Juli 2016, um 08:00 Uhr