

Übungsblatt 0

1. Komplexe Zahlen

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4, \quad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}, \quad \sum_{k=0}^7 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

2. Formel von de Moivre

Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi).$$

Benutzen Sie dazu vollständige Induktion.

3. Einheitswurzeln

- (a) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = z^m - 1$ für $m \in \mathbb{N}$. $\zeta \in \mathbb{C}$ heisst m -te Einheitswurzel, falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, daß es zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ genau m verschiedene m -te Einheitswurzeln gibt, nämlich $\zeta_m^{(k)} := \cos(2\pi \frac{k}{m}) + i \sin(2\pi \frac{k}{m})$, $k = 0, \dots, m-1$. Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.
- (b) Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = 0$ und $\prod_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = (-1)^{m+1}$. Erklären Sie damit das letzte Resultat aus Aufgabe 1.

4. Quadratwurzel

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von \sqrt{z} als Funktion von x und y .

Hinweis: Setzen Sie $\sqrt{z} = u + iv$ an und betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $(u + iv)^2 = x + iy$.

Bearbeitung: Dienstag, 2. Mai 2017 in den Übungen.

