PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 0

1. Komplexe Zahlen
   Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$\left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4, \qquad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}, \qquad \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

2. Formel von de Moivre
   Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt:
   $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi).$$
   Benutzen Sie dazu vollständige Induktion.

3. Einheitswurzeln
   (a) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = z^m - 1$ für $m \in \mathbb{N}$. $\zeta \in \mathbb{C}$ heisst m-te Einheitswurzel, falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, daß es zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ genau m verschiedene m-te Einheitswurzeln gibt, nämlich $\zeta_m^{(k)} := \cos(2\pi\frac{k}{m}) + i\sin(2\pi\frac{k}{m})$, $k = 0, \ldots, m-1$. Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.
   (b) Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = 0$ und $\prod_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = (-1)^{m+1}$. Erklären Sie damit das letzte Resultat aus Aufgabe 1.

4. Quadratwurzel
   Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $\sqrt{z}$ als Funktion von x und y.
   Hinweis: Setzen Sie $\sqrt{z} = u + iv$ an und betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $(u + iv)^2 = x + iy$.

Bearbeitung: Dienstag, 2. Mai 2017 in den Übungen.

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 1

5. Alternative Beschreibung der komplexen Zahlen
   (4 Punkte) Betrachten Sie die Menge $\mathcal{C} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ versehen mit der Matrizenaddition $+$ und der Matrizenmultiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, daß $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ einen Körper bildet, der zum Körper $\mathbb{C}$ isomorph ist. Welcher Operation entspricht die komplexe Konjugation unter diesem Isomorphismus ?

6. Dreiecksungleichung
   Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

   $$|z + w| \leq |z| + |w|$$

   Wann gilt Gleichheit ?

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

   $$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

7. Selbstabbildungen von Teilmengen von $\mathbb{C}$

   (a) (1 Punkt) Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil.
   Wir betrachten die Abbildung $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -\frac{1}{z}$. Zeigen Sie, daß $S(z) \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{H}$, und daß $S \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

   (b) (1 Punkt) Es seien $z, a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß gilt: $|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$.

   (c) (1 Punkt) Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen vom Betrag kleiner als 1.
   Für $a \in \mathbb{E}$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-a}{z\bar{a}-1}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), daß gilt: $\varphi_a(z) \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{E}$, und $|\varphi_a(z)| = 1$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

8. Spiegelung und Inversion an der Einheitskreislinie

   (a) (1 Punkt) Es sei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, z \to \frac{1}{\bar{z}}$. Geben Sie eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $f(z)$ (mit Beweis).

   (b) (1 Punkt) Es seien $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Bestimmen Sie $f(D_i), i = 1, 2, 3$.

   (c) (1 Punkt) Betrachten Sie die Abbildung $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, z \to \frac{1}{z}$. Geben Sie eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $g(z)$.

   (d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid g(z) = z\}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 3. Mai 2017 um 14 Uhr