PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 0

1. Komplexe Zahlen
   Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.
   $$\left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4,\qquad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3},\qquad \sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

2. Formel von de Moivre
   Es sei $\varphi\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für alle $m\in\mathbb{Z}$ gilt:
   $$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m=\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi).$$
   Benutzen Sie dazu vollständige Induktion.

3. Einheitswurzeln
   (a) Es sei $p\in\mathbb{C}[z]$ mit $p(z)=z^m-1$ für $m\in\mathbb{N}$. $\zeta\in\mathbb{C}$ heisst m-te Einheitswurzel, falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, daß es zu jedem $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ genau m verschiedene m-te Einheitswurzeln gibt, nämlich $\zeta_m^{(k)}:=\cos(2\pi\frac{k}{m})+i\sin(2\pi\frac{k}{m})$, $k=0,\dots,m-1$. Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.
   (b) Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_{k=0}^{m-1}\zeta_m^{(k)}=0$ und $\prod_{k=0}^{m-1}\zeta_m^{(k)}=(-1)^{m+1}$. Erklären Sie damit das letzte Resultat aus Aufgabe 1.

4. Quadratwurzel
   Es sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $\sqrt{z}$ als Funktion von x und y.
   Hinweis: Setzen Sie $\sqrt{z}=u+iv$ an und betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $(u+iv)^2=x+iy$.

Bearbeitung: Dienstag, 2. Mai 2017 in den Übungen.

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 1

5. Alternative Beschreibung der komplexen Zahlen
(4 Punkte) Betrachten Sie die Menge $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ versehen mit der Matrizenaddition $+$ und der Matrizenmultiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, daß $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ einen Körper bildet, der zum Körper $\mathbb{C}$ isomorph ist. Welcher Operation entspricht die komplexe Konjugation unter diesem Isomorphismus ?

6. Dreiecksungleichung
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:
   $$|z + w| \leq |z| + |w|$$
   Wann gilt Gleichheit ?

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:
   $$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

7. Selbstabbildungen von Teilmengen von $\mathbb{C}$

   (a) (1 Punkt) Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil.
   Wir betrachten die Abbildung $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -\frac{1}{z}$. Zeigen Sie, daß $S(z) \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{H}$, und daß $S \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

   (b) (1 Punkt) Es seien $z, a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß gilt: $|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$.

   (c) (1 Punkt) Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen vom Betrag kleiner als 1.
   Für $a \in \mathbb{E}$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-a}{z\bar{a}-1}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), daß gilt: $\varphi_a(z) \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{E}$, und $|\varphi_a(z)| = 1$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

8. Spiegelung und Inversion an der Einheitskreislinie

   (a) (1 Punkt) Es sei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, z \to \frac{1}{\bar{z}}$. Geben Sie eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $f(z)$ (mit Beweis).

   (b) (1 Punkt) Es seien $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Bestimmen Sie $f(D_i), i = 1, 2, 3$.

   (c) (1 Punkt) Betrachten Sie die Abbildung $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, z \to \frac{1}{z}$. Geben Sie eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $g(z)$.

   (d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid g(z) = z\}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 3. Mai 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 2

9. Stetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus

   (a) (1 Punkt) Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie, daß für den Hauptwert des Arguments gilt:

   $$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \pi & \text{falls } y = 0, x < 0, \\ \frac{y}{|y|} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Dabei sei arccos die Umkehrfunktion zur reellen Kosinusfunktion $\cos|_{[0,\pi]}$.

   (b) (2 Punkte) Es sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ stetig ist. Folgern Sie, daß der Hauptzweig des Logarithmus $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}_-$ stetig ist.

   (c) (1 Punkt) Es sei $a \in \mathbb{R}_{<0}$. Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte

   $$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{Log} z, \qquad \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{Log} z\,.$$

10. Komplexe Differenzierbarkeit

    (a) (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{falls } z \neq 0, \\ 0 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$

    Zeigen Sie, daß f für alle $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ komplex differenzierbar ist, aber nicht im Nullpunkt.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die grösste Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, in der $f(z) = \operatorname{Log}(z^5 + 1)$ holomorph ist, und bestimmen Sie f'.

11. Lokal konstante holomorphe Funktionen

    (4 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(D), D \subset \mathbb{C}$ offen. Es gelte eine der folgenden Bedingungen:

    (a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant.

(b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

(c) $|f|$ ist konstant.

(d) $\arg f$ ist konstant.

Zeigen Sie, daß gilt: f ist lokal konstant.

12. Cayley–Abbildung
Es seien $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ wie in Aufgabe 7. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}\,.$$

Diese Abbildung heisst Cayley–Abbildung.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß f eine im Grossen konforme Abbildung ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Bild unter f vom Rand von $\mathbb{H}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 10. Mai 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 3

13. Winkelerhaltung von holomorphen Funktionen

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß es zu jedem Paar $(z,w) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ genau eine reelle Zahl $\omega := \omega(z,w) \in (-\pi,\pi]$ gibt, so daß $\cos\omega = \frac{\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}$ und $\sin\omega = \frac{\langle iz,w\rangle}{|z|\,|w|}$, wobei $\langle z,w\rangle := \operatorname{Re} z\bar{w}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}$ ist. ω heisst der orientierte Winkel zwischen z und w und wird mit $\sphericalangle(z,w)$ bezeichnet.

    (b) (3 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(D), D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$. Weiter seien $\gamma_i : [-1,1] \to D$, $i = 1,2$, zwei reguläre Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$. Es sei $\sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ der orientierte Schnittwinkel der beiden Kurven im Punkt a. Zeigen Sie, daß für den orientierten Schnittwinkel ω der beiden Bildkurven $f\circ\gamma_1$ und $f\circ\gamma_2$ im Bildpunkt $f(\gamma_1(0)) = f(\gamma_2(0)) = f(a)$ gilt: $\omega = \sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

14. Komplexe Kurvenintegrale

    (a) (2 Punkte) Es sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \to \exp(it)$, weiter sei $g : \operatorname{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $\operatorname{im}(\gamma)$ das Bild von γ in $\mathbb{C}$ bezeichne. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\overline{\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \overline{g(z)} z^{-2}\mathrm{d}z\,.$$

    (b) (2 Punkte) Es sei $\gamma : [0,\frac{\pi}{4}], t \mapsto R\exp(it)$, $R > 0$. Zeigen Sie, daß folgende Abschätzungen gelten:

$$\left|\int_\gamma \exp(iz^2)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})}{4R} < \frac{\pi}{4R}\,.$$

15. Berechnung von Kurvenintegralen

    (a) (2 Punkte) Es sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$, eine Kurve, deren Bild den Rand des Quadrats mit den Eckpunkten $1, i, -1, -i$ beschreibt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für γ an und berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$.

    (b) (1 Punkt) Es seien $\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto -t - it$, und $\gamma_2 : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2}\exp(it)$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} |z|\mathrm{d}z$ für $i = 1,2$.

(c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$.

16. Gebiete

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete ? (Antwort mit Beweis.)

(a) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 3\}$.

(b) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 3| < 1\}$.

(c) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 1\}$.

(d) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 17. Mai 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

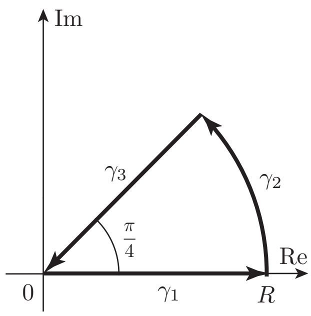
Übungsblatt 4

17. Fresnelsche Integrale

(4 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral der Funktion $f(z) = \exp(iz^2)$ entlang des geschlossenen Weges $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ im nebenstehenden Schaubild. Verwenden Sie dazu die Abschätzung aus Aufgabe 14(b). Sie dürfen ebenfalls verwenden, daß $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



18. Stetiger Zweig des Logarithmus

Es sei $D \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $\ell : D \to \mathbb{C}$ mit $\exp(\ell(z)) = z$ für alle $z \in D$ heisst ein stetiger Zweig des Logarithmus. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) Jeder weitere stetige Zweig des Logarithmus $\tilde{\ell}$ ist von der Form $\tilde{\ell} = \ell + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

(b) (1 Punkt) Jeder stetige Zweig des Logarithmus ℓ ist holomorph und es gilt $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

(c) (1 Punkt) Es existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus auf D, wenn die Funktion $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf D besitzt.

(d) (1 Punkt) Geben Sie zwei Gebiete D_1 und D_2 und stetige Zweige des Logarithmus $\ell_i : D_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, an, so daß ihre Differenz auf $D_1 \cap D_2$ nicht konstant ist.

19. Komplexe Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale (mit Hilfe der Partialbruchzerlegung):

(a) (3 Punkte) $\int_{\gamma_i} \frac{\exp(\zeta^2)}{\zeta^3 - 12\zeta^2 + 36\zeta}\mathrm{d}\zeta$ für $\gamma_i = \partial B_{R_i}(2)$ mit $R_i = 2i - 1$ für $i = 1, 2, 3$.

(b) (1 Punkt) $\int_\gamma \frac{1}{\zeta^2-1}\mathrm{d}\zeta$ für $\gamma = \sum_{i=1}^4 \gamma_i$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2} - \exp(-it),\\
\gamma_2 &: [0,2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(-\tfrac{i\pi}{4}) - t\tfrac{1-i}{\sqrt{2}},\\
\gamma_3 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\sqrt{2} + \exp(it),\\
\gamma_4 &: [0,2] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\exp(\tfrac{i\pi}{4}) + t\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

20. Ganze Funktionen

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte) Ist f nicht konstant, dann ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(b) (2 Punkte) Ist $\operatorname{Re} f$ beschränkt, dann ist f konstant.
Verwenden Sie dazu Aufgabe (a) oder betrachten Sie die Funktion $\exp \circ f$.

Abgabetermin: Mittwoch, 24. Mai 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 5

21. Schwarzsches Spiegelungsprinzip

    (4 Punkte) Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$ ein zur reellen Achse spiegelsymmetrisches Gebiet, d.h. aus $z \in D$ folgt $\bar{z} \in D$. Weiter seien $D_+ = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_- = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ und $D_0 = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z = 0\} = D \cap \mathbb{R}$. Es sei $f : D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{D_+}$ holomorph und $f(D_0) \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

    $$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_+ \cup D_0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } z \in D_- \end{cases}$$

    Zeigen Sie, daß gilt: $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(D)$. Verwenden Sie dazu den Satz von Morera.

22. Normale Konvergenz

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{1-z^2}$ auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ normal konvergiert.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}$ in $D = \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ lokal gleichmässig, aber nicht normal konvergiert.

23. Konvergenz auf dem Rand

    Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit Beweis) einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$ an, die

    (a) (1 Punkt) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises konvergiert,

    (b) (1 Punkt) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises divergiert,

    (c) (1 Punkt) auf dem Rand des Konvergenzkreises mindestens zwei Konvergenzpunkte und mindestens zwei Divergenzpunkte besitzt,

    (d) (1 Punkt) für keinen Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises absolut konvergiert.

24. Wachstumslemma für Polynome und rationale Funktionen

(a) (1 Punkt) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom vom Grad $m \geq 1$ mit $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, $a_m \neq 0$. Es sei $R = \max\{1, \frac{2}{|a_m|} \sum_{k=0}^{m-1} |a_k|\}$. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $\frac{1}{2}|a_m||z|^m \leq |p(z)| \leq 2|a_m||z|^m$.

(b) (1 Punkt) Es seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome vom Grad m bzw. n. Zeigen Sie, daß es reelle Zahlen $K, L, R > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $K|z|^{m-n} \leq \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq L|z|^{m-n}$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, wenn es reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|f(z)| \leq a + b|z|^n$. Welche Aussage erhält man für den Fall $n = 0$?

Abgabetermin: Mittwoch, 31. Mai 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 6

25. Logarithmische Reihe

    (a) (1 Punkt) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| \leq 1$ konvergiert. Betrachten Sie dazu die Reihe $(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die logarithmische Reihe $\lambda(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ mit $|z| \leq 1$ konvergiert, für alle $|z| < 1$ normal konvergiert, und daß $\lambda'(z) = \frac{1}{1+z}$.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $h(z) := \lambda(z-1)$ ein holomorpher Zweig des Logarithmus in $B_1(1)$ ist.

26. Tangens- und Kotangensreihe

    Der komplexe Tangens ist definiert als $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, der komplexe Kotangens ist definiert als $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Weiter seien B_n die Bernoulli–Zahlen. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) Es seien $f \in \mathcal{O}(B_r(0))$ und $z_0 \in \partial B_r(0)$ so, daß $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nicht existiert. Dann ist der Konvergenzradius einer Potenzreihenentwicklung von f um 0 genau r.

    (b) (1 Punkt) $z\cot z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$ für alle $z \in B_r(0), r < R = \pi$.

    (c) (1 Punkt) $\tan z = \cot z - 2\cot(2z)$.

    (d) (1 Punkt) $\tan z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$ für alle $z \in B_r(0), r < R = \frac{\pi}{2}$.

27. Hypergeometrische Reihe

    (4 Punkte) Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N}$. Wir betrachten die hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)f''(z) + (c - (a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0,$$

für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Lösung $f(z)$ in einer Kreisscheibe $B_R(0)$ gibt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius R. Diese Lösung heisst hypergeometrische Reihe.

Setzen Sie dazu eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$, an. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung leiten Sie aus einem Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n her und lösen diese Rekursion.

28. Identitäten holomorpher Funktionen

    (a) (2 Punkte) Es seien D ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $fg = 0$. Zeigen Sie, daß dann $f = 0$ oder $g = 0$.

    Dies bedeutet, daß der Ring $\mathcal{O}(D)$ nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsbereich ist.

    (b) (2 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{C}$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n \in \mathbb{C}$, Folgen komplexer Zahlen. Wir definieren zwei Potenzreihen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Beweisen oder widerlegen Sie: Besitzt die Gleichung $f(z) = g(z)$ unendlich viele Lösungen, so ist $f = g$ und damit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 14. Juni 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 7

29. Quantitative Form des Offenheitssatzes

    Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $c \in D$, $B_r(c)$, $r > 0$, eine Kreisscheibe mit $\overline{B}_r(c) \subset D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$.

    (a) (1 Punkt) Es gelte $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$. Zeigen Sie, daß dann f eine Nullstelle in $B_r(c)$ hat. Betrachten Sie dazu die Mittelwertgleichung für $1/f$.

    (b) (2 Punkte) Es gelte $\delta := \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß dann gilt: $f(B_r(c)) \supset B_\delta(f(c))$.

    (c) (1 Punkt) Beweisen Sie den Offenheitssatz mit Hilfe von (b)

30. Analytischer Beweis des Maximumprinzips

    Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-c)^n$ eine konvergente Potenzreihe in $B_r(c)$, $c \in \mathbb{C}$, mit Konvergenzradius $R > r$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi}) \mathrm{e}^{-in\varphi} \mathrm{d}\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

    (b) (1 Punkt) Es sei $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Zeigen Sie, daß gilt:
    $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi})|^2 \mathrm{d}\varphi \leq M(r)^2$.

    (c) (1 Punkt) Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ und ein s so, daß $0 < s < r$ und $M(s) = |a_m| s^m$. Zeigen Sie, daß dann gilt: $f(z) = a_m (z-c)^m$.

    (d) (1 Punkt) Beweisen Sie das Maximumprinzip mit Hilfe von (c).

31. Konforme Selbstabbildungen von $\mathbb{H}$.

    (4 Punkte) Zeigen Sie, daß

    $$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, z \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \right\}$$

    ein Gruppenisomorphismus ist.

    Hinweis: Aufgabe 12.

32. Nicht hebbare und wesentliche Singularitäten

(4 Punkte) Es seien $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, und $f \in \mathcal{O}(\mathring{B}_r(a))$. Die Singularität von f in a sei nicht hebbar. Zeigen Sie, daß dann $\exp \circ f$ eine wesentliche Singularität in a besitzt.

Abgabetermin: Mittwoch, 21. Juni 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 8

33. Quantitative Charakterisierung der Singularitäten

    (4 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathring{B}_r(c))$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, mit Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-c)^n$. Zeigen Sie, daß f in c genau dann

    (a) eine hebbare Singularität hat, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,

    (b) einen Pol der Ordnung $k > 0$ hat, wenn $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,

    (c) eine wesentliche Singularität hat, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

34. Laurentreihenentwicklungen

    Für $c \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$ bezeichnen wir den Kreisring mit $B_{r,R}(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < R\}$. Es sei $f(z) = \frac{1-2z}{z(z-1)(z-2)}$. Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in

    (a) (1 Punkt) $B_{0,1}(2)$,

    (b) (1 Punkt) $B_{1,2}(2)$,

    (c) (1 Punkt) $B_{2,\infty}(2)$,

    (d) (1 Punkt) $B_{2,\infty}(0)$.

35. Erzeugende Funktion der Fibonacci–Zahlen

    Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_0 = f_1 = 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \ge 2$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) Durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ wird die rationale Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ definiert.

    (b) (2 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

36. Möbiustransformationen auf der Riemannschen Zahlkugel

(a) (1 Punkt) Es seien $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ drei verschiedene Punkte. Zeigen Sie, daß es genau eine Möbiustransformation $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ gibt mit der Eigenschaft, daß $g(z_0) = 0$, $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = \infty$.

(b) (1 Punkt) Für $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ und die in (a) bestimmte Transformation g nennen wir die Zahl $D(z_0, z_1, z_2, z_3) := g(z_3) \in \overline{\mathbb{C}}$ das Doppelverhältnis der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3. Zeigen Sie, daß gilt: $D(h(z_0), h(z_1), h(z_2), h(z_3)) = D(z_0, z_1, z_2, z_3)$ für alle paarweise verschiedenen $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ und alle Möbiustransformationen $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn z_0, z_1, z_2, z_3 auf einer Geraden oder auf einem Kreis liegen.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß jede Möbiustransformation Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise abbildet.

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Juni 2017 um 14 Uhr

PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 9

37. Residuen Für die folgenden Funktionen bestimme man in allen ihren Singularitäten die Residuen:

    (a) (1 Punkt) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$

    (b) (1 Punkt) $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$

    (c) (1 Punkt) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$

    (d) (1 Punkt) $f(z) = \frac{\sin z}{\cos(z^3)-1}$

38. Explizite Formel für die Umkehrfunktion

    (4 Punkte) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $r > 0$ und $a \in D$ so, dass $\overline{B}_r(a) \subset D$, und $f \in \mathcal{O}(D)$ sei injektiv. Zeigen Sie, daß gilt:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \mathrm{d}\zeta, \quad \text{für alle } w \in f(B_r(a)).$$

39. Gauß'sches Fehlerintegral

    Es seien $a := \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$ und $g(z) := \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $g(z) - g(z+a) = \exp(-z^2)$.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Polstellen von g sowie deren Residuen.

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
    Wählen Sie einen geeigneten Weg γ und wenden Sie den Residuensatz auf die Funktion $g(z)$ an.

    Damit hat Aufgabe 17 eine rein funktionentheoretische Herleitung.

40. Lösungen von Gleichungen in der Einheitskreisscheibe

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 4z^5 + 12z^3 - 7iz - 1$ in $\overline{\mathbb{E}}$.

(b) (2 Punkte) Es seien $D \in \mathbb{C}$, so daß $\overline{\mathbb{E}} \subset D$, und $f \in \mathcal{O}(D)$, so daß $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $\mathbb{E}$ besitzt, und daß f genau einen Fixpunkt in $\mathbb{E}$ hat.

Abgabetermin: Mittwoch, 5. Juli 2017 um 14 Uhr

Übungsblatt 10

41. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5-3\cos t} = 0.$$

    (b) (2 Punkte)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{e}^{2ix} \mathrm{d}x = \frac{i\pi}{e^2}.$$

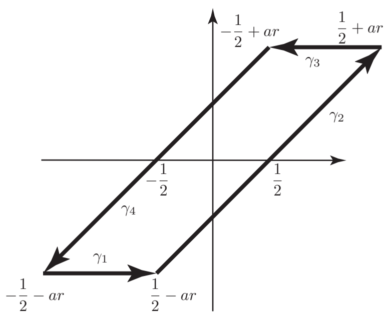
42. Weitere Klasse von bestimmten Integralen

    (a) (3 Punkte) Es sei $f = \frac{p}{q} \in \mathbb{C}(z)$ mit $q(z) \neq 0$ für $z \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ und $\deg q \geq \deg p + 2$. Zeigen Sie, daß gilt:
$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = -\sum_{a \in \mathbb{C}_+} \mathrm{res}_a \left(f(z)\,\mathrm{Log}(-z)\right)$$
    wobei $\mathbb{C}_+$ die positiv geschlitzte Ebene sei.

    (b) (1 Punkt) Berechnen Sie
$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1}.$$

43. Mordells Integral für die Gauss'sche Summe

    Die Summe $G_n := \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i k^2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, heisst Gauss'sche Summe und spielt in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Es sei
$$g_n(z) := \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i (z+k)^2}{n}\right)}{\mathrm{e}^{2\pi i z} - 1}.$$
    Weiter sei $a = \exp(\frac{i\pi}{4})$ im nebenstehenden Schaubild. Zeigen Sie, daß gilt:



(a) (1 Punkt) Die Funktion $\frac{\exp(uz)}{\exp(z)-1}$, $0 \leq u \leq 1$, ist beschränkt in der Menge $A := \{(u,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid 0 \leq u \leq 1, z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_r(n), r < \frac{1}{2}\}$.

(b) (1 Punkt) $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} g_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_3} g_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$.

(c) (1 Punkt)

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_2} g_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_4} g_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta = (1+(-i)^n)a\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

(d) (1 Punkt) $G_n = \frac{1+(-i)^n}{1-i}\sqrt{n}$.

44. Gamma–Funktion

(a) (2 Punkte) Es sei $S = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, daß das Produkt

$$G(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z+n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^z$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$ zu einer Zahl $G(z) \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß die Funktion $G(z)$ meromorph ist, mit nur einfachen Polstellen in S.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß gilt: $G(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)!m^z}{z(z+1)\dots(z+m-1)}$. Schreiben Sie dazu m^z als geeignetes teleskopierendes Produkt.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $G(z+1) = zG(z)$, $G(1) = 1$, und daß $G(z)|_A$ beschränkt ist, wobei A den Vertikalstreifen $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$ bezeichne.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. Juli 2017 um 14 Uhr