PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 11

45. Eulersche Formel für $\zeta(2k)$

(4 Punkte) Es seien $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und B_{2k} die Bernoulli–Zahlen. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Bestimmen Sie $\zeta(2)$ und $\zeta(4)$ explizit, indem Sie die entsprechenden Werte von B_{2k} verwenden.

46. Eulersche Integrale

Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte)

$$\int_0^\infty t^{z-1}\exp(-wt)\mathrm{d}t = w^{-z}\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Re} z > 0.$$

(b) (2 Punkte)

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

47. Gudermannsche Reihe

Wir betrachten die Funktionen $H_0(z) := \left(z + \frac{1}{2}\right)(\operatorname{Log}(z+1) - \operatorname{Log}(z)) - 1$ und $H(z) := \sum_{n=0}^\infty H_0(z+n)$ für $z \in \mathbb{C}_-$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $|H_0(z)| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2z+1}\right|^2$ für $z \in \mathbb{C}_-$, $|z + \frac{1}{2}| > 1$. Betrachten Sie dazu $H_0(z)$ als Funktion von $w = \frac{1}{2z+1}$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $H(z)$ für $z \in \mathbb{C}_-$ eine holomorphe Funktion darstellt.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß für alle $0 < \varepsilon \leq \pi$ gilt: $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z \in W_\varepsilon}} H(z) = 0$, wobei $W_\varepsilon = \{z = |z|\exp(i\varphi) \mid -\pi + \varepsilon \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon\}$.

48. Stirlingsche Formel

Es seien $H(z)$ und W_ε wie in Aufgabe 47. Weiter sei $h(z) := z^{z-\frac{1}{2}} \exp(-z) \exp(H(z))$ für $z \in \mathbb{C}_-$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $h(z+1) = zh(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $h(z)|_A$ beschränkt ist, wobei A den Vertikalstreifen $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq \operatorname{Re} z < 3\}$ bezeichne.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} \exp(-z) \exp(H(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O(\frac{1}{z})\right)$, wobei $O(\frac{1}{z})$ bedeutet, daß der Quotient aus linker und rechter Seite in jedem W_ε mit $z \to \infty$ gleichmässig gegen 1 konvergiert.

Abgabetermin: Mittwoch, 19. Juli 2017 um 14 Uhr