PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 12

49. Die Möbius'sche μ–Funktion

    Die Möbius'sche μ–Funktion werde durch
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$
    definiert. Zeigen Sie, daß gilt:
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{falls } n = p_1 \dots p_k \text{ das Produkt } k \textit{ verschiedener Primzahlen } p_j \textit{ ist}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

50. Eulersche φ–Funktion

    Zeigen Sie, daß gilt:
$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0,$$
    wobei $\varphi(n) = |\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\,|$ die Anzahl der primen Restklassen modulo n ist. Die hierdurch definierte Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heisst Eulersche φ–Funktion.

51. Die Funktion ξ

    Zeigen Sie, daß die Funktion $\xi(s) := s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ folgende Eigenschaften besitzt:

    (a) ξ ist eine ganze Funktion.
    (b) $\xi(s) = \xi(1-s)$.
    (c) ξ ist auf den Geraden $\operatorname{Im} s = 0$ und $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ reell.
    (d) $\xi(0) = \xi(1) = 1$.

52. Konstruktion meromorpher Funktionen mit vorgegebenen Polen

    Es sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit nur einfachen Polen und ganzzahligen Residuen. Zeigen Sie, daß es $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ gibt mit $f(z) = h'(z)/h(z)$.