PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 2

9. Stetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus

   (a) (1 Punkt) Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie, daß für den Hauptwert des Arguments gilt:

   $$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \pi & \text{falls } y = 0, x < 0, \\ \frac{y}{|y|} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Dabei sei arccos die Umkehrfunktion zur reellen Kosinusfunktion $\cos|_{[0,\pi]}$.

   (b) (2 Punkte) Es sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ stetig ist. Folgern Sie, daß der Hauptzweig des Logarithmus $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}_-$ stetig ist.

   (c) (1 Punkt) Es sei $a \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte

   $$\lim_{\substack{z\to a \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{Log} z, \qquad \lim_{\substack{z\to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{Log} z\,.$$

10. Komplexe Differenzierbarkeit

    (a) (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{falls } z \neq 0, \\ 0 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$

    Zeigen Sie, daß f für alle $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ komplex differenzierbar ist, aber nicht im Nullpunkt.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die grösste Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, in der $f(z) = \operatorname{Log}(z^5 + 1)$ holomorph ist, und bestimmen Sie f'.

11. Lokal konstante holomorphe Funktionen
    (4 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(D), D \subset \mathbb{C}$ offen. Es gelte eine der folgenden Bedingungen:

    (a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant.

(b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

(c) $|f|$ ist konstant.

(d) $\arg f$ ist konstant.

Zeigen Sie, daß gilt: f ist lokal konstant.

12. Cayley–Abbildung
Es seien $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ wie in Aufgabe 7. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}\,.$$

Diese Abbildung heisst Cayley–Abbildung.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, daß f eine im Grossen konforme Abbildung ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Bild unter f vom Rand von $\mathbb{H}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 10. Mai 2017 um 14 Uhr