PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 3

13. Winkelerhaltung von holomorphen Funktionen

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß es zu jedem Paar $(z, w) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ genau eine reelle Zahl $\omega := \omega(z, w) \in (-\pi, \pi]$ gibt, so daß $\cos\omega = \frac{\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}$ und $\sin\omega = \frac{\langle iz,w\rangle}{|z|\,|w|}$, wobei $\langle z, w\rangle := \operatorname{Re} z\bar{w}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}$ ist. ω heisst der orientierte Winkel zwischen z und w und wird mit $\sphericalangle(z, w)$ bezeichnet.

    (b) (3 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(D), D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$. Weiter seien $\gamma_i : [-1, 1] \to D$, $i = 1, 2$, zwei reguläre Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$. Es sei $\sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ der orientierte Schnittwinkel der beiden Kurven im Punkt a. Zeigen Sie, daß für den orientierten Schnittwinkel ω der beiden Bildkurven $f\circ\gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Bildpunkt $f(\gamma_1(0)) = f(\gamma_2(0)) = f(a)$ gilt: $\omega = \sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

14. Komplexe Kurvenintegrale

    (a) (2 Punkte) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \to \exp(it)$, weiter sei $g : \operatorname{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $\operatorname{im}(\gamma)$ das Bild von γ in $\mathbb{C}$ bezeichne. Zeigen Sie, daß gilt:
    $$\overline{\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \overline{g(z)} z^{-2}\mathrm{d}z\,.$$

    (b) (2 Punkte) Es sei $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}], t \mapsto R\exp(it)$, $R > 0$. Zeigen Sie, daß folgende Abschätzungen gelten:
    $$\left|\int_\gamma \exp(iz^2)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})}{4R} < \frac{\pi}{4R}\,.$$

15. Berechnung von Kurvenintegralen

    (a) (2 Punkte) Es sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$, eine Kurve, deren Bild den Rand des Quadrats mit den Eckpunkten $1, i, -1, -i$ beschreibt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für γ an und berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$.

    (b) (1 Punkt) Es seien $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto -t - it$, und $\gamma_2 : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2}\exp(it)$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} |z|\mathrm{d}z$ für $i = 1, 2$.

(c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$.

16. Gebiete

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete ? (Antwort mit Beweis.)

(a) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 3\}$.

(b) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 3| < 1\}$.

(c) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 1\}$.

(d) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 17. Mai 2017 um 14 Uhr