PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

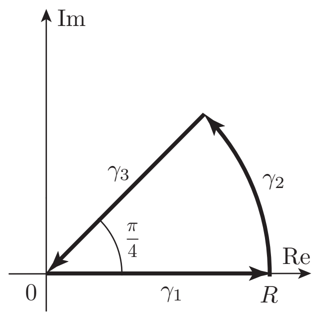
Übungsblatt 4

17. Fresnelsche Integrale

(4 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral der Funktion $f(z) = \exp(iz^2)$ entlang des geschlossenen Weges $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ im nebenstehenden Schaubild. Verwenden Sie dazu die Abschätzung aus Aufgabe 14(b). Sie dürfen ebenfalls verwenden, daß $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



18. Stetiger Zweig des Logarithmus

Es sei $D \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $\ell : D \to \mathbb{C}$ mit $\exp(\ell(z)) = z$ für alle $z \in D$ heisst ein stetiger Zweig des Logarithmus. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) Jeder weitere stetige Zweig des Logarithmus $\tilde{\ell}$ ist von der Form $\tilde{\ell} = \ell + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

(b) (1 Punkt) Jeder stetige Zweig des Logarithmus ℓ ist holomorph und es gilt $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

(c) (1 Punkt) Es existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus auf D, wenn die Funktion $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf D besitzt.

(d) (1 Punkt) Geben Sie zwei Gebiete D_1 und D_2 und stetige Zweige des Logarithmus $\ell_i : D_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, an, so daß ihre Differenz auf $D_1 \cap D_2$ nicht konstant ist.

19. Komplexe Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale (mit Hilfe der Partialbruchzerlegung):

(a) (3 Punkte) $\int_{\gamma_i} \frac{\exp(\zeta^2)}{\zeta^3 - 12\zeta^2 + 36\zeta}\mathrm{d}\zeta$ für $\gamma_i = \partial B_{R_i}(2)$ mit $R_i = 2i - 1$ für $i = 1, 2, 3$.

(b) (1 Punkt) $\int_\gamma \frac{1}{\zeta^2-1} \mathrm{d}\zeta$ für $\gamma = \sum_{i=1}^4 \gamma_i$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2} - \exp(-it), \\
\gamma_2 &: [0,2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(-\tfrac{i\pi}{4}) - t\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}, \\
\gamma_3 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\sqrt{2} + \exp(it), \\
\gamma_4 &: [0,2] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\exp(\tfrac{i\pi}{4}) + t\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

20. Ganze Funktionen

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte) Ist f nicht konstant, dann ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(b) (2 Punkte) Ist $\operatorname{Re} f$ beschränkt, dann ist f konstant.
Verwenden Sie dazu Aufgabe (a) oder betrachten Sie die Funktion $\exp \circ f$.

Abgabetermin: Mittwoch, 24. Mai 2017 um 14 Uhr