PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 5

21. Schwarzsches Spiegelungsprinzip

    (4 Punkte) Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$ ein zur reellen Achse spiegelsymmetrisches Gebiet, d.h. aus $z \in D$ folgt $\bar{z} \in D$. Weiter seien $D_+ = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_- = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ und $D_0 = \{z \in D \mid \operatorname{Im} z = 0\} = D \cap \mathbb{R}$. Es sei $f : D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{D_+}$ holomorph und $f(D_0) \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

    $$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_+ \cup D_0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } z \in D_- \end{cases}$$

    Zeigen Sie, daß gilt: $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(D)$. Verwenden Sie dazu den Satz von Morera.

22. Normale Konvergenz

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{1-z^2}$ auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ normal konvergiert.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k}$ in $D = \mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$ lokal gleichmässig, aber nicht normal konvergiert.

23. Konvergenz auf dem Rand

    Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit Beweis) einer komplexen Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$ an, die

    (a) (1 Punkt) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises konvergiert,

    (b) (1 Punkt) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises divergiert,

    (c) (1 Punkt) auf dem Rand des Konvergenzkreises mindestens zwei Konvergenzpunkte und mindestens zwei Divergenzpunkte besitzt,

    (d) (1 Punkt) für keinen Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises absolut konvergiert.

24. Wachstumslemma für Polynome und rationale Funktionen

(a) (1 Punkt) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom vom Grad $m \geq 1$ mit $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, $a_m \neq 0$. Es sei $R = \max\{1, \frac{2}{|a_m|} \sum_{k=0}^{m-1} |a_k|\}$. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $\frac{1}{2}|a_m||z|^m \leq |p(z)| \leq 2|a_m||z|^m$.

(b) (1 Punkt) Es seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome vom Grad m bzw. n. Zeigen Sie, daß es reelle Zahlen $K, L, R > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $K|z|^{m-n} \leq \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq L|z|^{m-n}$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, wenn es reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|f(z)| \leq a + b|z|^n$. Welche Aussage erhält man für den Fall $n = 0$?

Abgabetermin: Mittwoch, 31. Mai 2017 um 14 Uhr