PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 6

25. Logarithmische Reihe

    (a) (1 Punkt) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| \leq 1$ konvergiert. Betrachten Sie dazu die Reihe $(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die logarithmische Reihe $\lambda(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ mit $|z| \leq 1$ konvergiert, für alle $|z| < 1$ normal konvergiert, und daß $\lambda'(z) = \frac{1}{1+z}$.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $h(z) := \lambda(z-1)$ ein holomorpher Zweig des Logarithmus in $B_1(1)$ ist.

26. Tangens- und Kotangensreihe

    Der komplexe Tangens ist definiert als $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, der komplexe Kotangens ist definiert als $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Weiter seien B_n die Bernoulli–Zahlen. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) Es seien $f \in \mathcal{O}(B_r(0))$ und $z_0 \in \partial B_r(0)$ so, daß $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nicht existiert. Dann ist der Konvergenzradius einer Potenzreihenentwicklung von f um 0 genau r.

    (b) (1 Punkt) $z\cot z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$ für alle $z \in B_r(0), r < R = \pi$.

    (c) (1 Punkt) $\tan z = \cot z - 2\cot(2z)$.

    (d) (1 Punkt) $\tan z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$ für alle $z \in B_r(0), r < R = \frac{\pi}{2}$.

27. Hypergeometrische Reihe

    (4 Punkte) Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N}$. Wir betrachten die hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)f''(z) + (c-(a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0,$$

für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Lösung $f(z)$ in einer Kreisscheibe $B_R(0)$ gibt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius R. Diese Lösung heisst hypergeometrische Reihe.

Setzen Sie dazu eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$, an. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung leiten Sie aus einem Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n her und lösen diese Rekursion.

28. Identitäten holomorpher Funktionen

    (a) (2 Punkte) Es seien D ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $fg = 0$. Zeigen Sie, daß dann $f = 0$ oder $g = 0$.

        Dies bedeutet, daß der Ring $\mathcal{O}(D)$ nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsbereich ist.

    (b) (2 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{C}$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n \in \mathbb{C}$, Folgen komplexer Zahlen. Wir definieren zwei Potenzreihen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Beweisen oder widerlegen Sie: Besitzt die Gleichung $f(z) = g(z)$ unendlich viele Lösungen, so ist $f = g$ und damit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 14. Juni 2017 um 14 Uhr