PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 7

29. Quantitative Form des Offenheitssatzes

    Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $c \in D$, $B_r(c)$, $r > 0$, eine Kreisscheibe mit $\overline{B}_r(c) \subset D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$.

    (a) (1 Punkt) Es gelte $\min_{z\in\partial B} |f(z)| > |f(c)|$. Zeigen Sie, daß dann f eine Nullstelle in $B_r(c)$ hat. Betrachten Sie dazu die Mittelwertgleichung für $1/f$.

    (b) (2 Punkte) Es gelte $\delta := \frac{1}{2} \min_{z\in\partial B} |f(z) - f(c)| > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß dann gilt: $f(B_r(c)) \supset B_\delta(f(c))$.

    (c) (1 Punkt) Beweisen Sie den Offenheitssatz mit Hilfe von (b)

30. Analytischer Beweis des Maximumprinzips

    Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ eine konvergente Potenzreihe in $B_r(c)$, $c \in \mathbb{C}$, mit Konvergenzradius $R > r$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{e}^{-in\varphi}\mathrm{d}\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

    (b) (1 Punkt) Es sei $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Zeigen Sie, daß gilt:
    $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi})|^2 \mathrm{d}\varphi \leq M(r)^2$.

    (c) (1 Punkt) Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ und ein s so, daß $0 < s < r$ und $M(s) = |a_m|s^m$. Zeigen Sie, daß dann gilt: $f(z) = a_m(z-c)^m$.

    (d) (1 Punkt) Beweisen Sie das Maximumprinzip mit Hilfe von (c).

31. Konforme Selbstabbildungen von $\mathbb{H}$.

    (4 Punkte) Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, z \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \right\}$$

    ein Gruppenisomorphismus ist.

    Hinweis: Aufgabe 12.

32. Nicht hebbare und wesentliche Singularitäten

    (4 Punkte) Es seien $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, und $f \in \mathcal{O}(\mathring{B}_r(a))$. Die Singularität von f in a sei nicht hebbar. Zeigen Sie, daß dann $\exp \circ f$ eine wesentliche Singularität in a besitzt.

Abgabetermin: Mittwoch, 21. Juni 2017 um 14 Uhr