PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 17

Übungsblatt 8

33. Quantitative Charakterisierung der Singularitäten

    (4 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathring{B}_r(c))$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, mit Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-c)^n$. Zeigen Sie, daß f in c genau dann

    (a) eine hebbare Singularität hat, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,

    (b) einen Pol der Ordnung $k > 0$ hat, wenn $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,

    (c) eine wesentliche Singularität hat, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

34. Laurentreihenentwicklungen

    Für $c \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichnen wir den Kreisring mit $B_{r,R}(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < R\}$. Es sei $f(z) = \frac{1-2z}{z(z-1)(z-2)}$. Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in

    (a) (1 Punkt) $B_{0,1}(2)$,

    (b) (1 Punkt) $B_{1,2}(2)$,

    (c) (1 Punkt) $B_{2,\infty}(2)$,

    (d) (1 Punkt) $B_{2,\infty}(0)$.

35. Erzeugende Funktion der Fibonacci–Zahlen

    Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_0 = f_1 = 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) Durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ wird die rationale Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ definiert.

    (b) (2 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

36. Möbiustransformationen auf der Riemannschen Zahlkugel

(a) (1 Punkt) Es seien $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ drei verschiedene Punkte. Zeigen Sie, daß es genau eine Möbiustransformation $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ gibt mit der Eigenschaft, daß $g(z_0) = 0$, $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = \infty$.

(b) (1 Punkt) Für $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ und die in (a) bestimmte Transformation g nennen wir die Zahl $D(z_0, z_1, z_2, z_3) := g(z_3) \in \overline{\mathbb{C}}$ das Doppelverhältnis der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3. Zeigen Sie, daß gilt: $D(h(z_0), h(z_1), h(z_2), h(z_3)) = D(z_0, z_1, z_2, z_3)$ für alle paarweise verschiedenen $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ und alle Möbiustransformationen $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn z_0, z_1, z_2, z_3 auf einer Geraden oder auf einem Kreis liegen.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß jede Möbiustransformation Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise abbildet.

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Juni 2017 um 14 Uhr