PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 9

37. Residuen Für die folgenden Funktionen bestimme man in allen ihren Singularitäten die Residuen:

    (a) (1 Punkt) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$

    (b) (1 Punkt) $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$

    (c) (1 Punkt) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$

    (d) (1 Punkt) $f(z) = \frac{\sin z}{\cos(z^3)-1}$

38. Explizite Formel für die Umkehrfunktion

    (4 Punkte) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $r > 0$ und $a \in D$ so, dass $\overline{B}_r(a) \subset D$, und $f \in \mathcal{O}(D)$ sei injektiv. Zeigen Sie, daß gilt:

    $$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \mathrm{d}\zeta, \quad \text{für alle } w \in f(B_r(a)).$$

39. Gauß'sches Fehlerintegral

    Es seien $a := \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$ und $g(z) := \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $g(z) - g(z+a) = \exp(-z^2)$.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Polstellen von g sowie deren Residuen.

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
    Wählen Sie einen geeigneten Weg γ und wenden Sie den Residuensatz auf die Funktion $g(z)$ an.

    Damit hat Aufgabe 17 eine rein funktionentheoretische Herleitung.

40. Lösungen von Gleichungen in der Einheitskreisscheibe

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 4z^5 + 12z^3 - 7iz - 1$ in $\overline{\mathbb{E}}$.

(b) (2 Punkte) Es seien $D \in \mathbb{C}$, so daß $\overline{\mathbb{E}} \subset D$, und $f \in \mathcal{O}(D)$, so daß $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $\mathbb{E}$ besitzt, und daß f genau einen Fixpunkt in $\mathbb{E}$ hat.

Abgabetermin: Mittwoch, 5. Juli 2017 um 14 Uhr