

Komplexe Zahlen

- ▶ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: Körper der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Unterkörper, und $\exists z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + 1 = 0$. genannt $\pm i$.
 $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$:
 $z + w = (x + u) + i(y + v)$, $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$.
- ▶ Komplexe Konjugation $\bar{} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$.
- ▶ Betrag $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- ▶ Polarkoordinatendarstellung: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r = |z|$,
 $\varphi = \text{Arg}(z)$, Hauptwert des Arguments, falls $\varphi \in (-\pi, \pi]$.
- ▶ n -te Einheitswurzeln $\zeta_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $(\zeta_k)^n = 1$,
 $0 \leq k < n$.

Elementare komplexe Funktionen

- ▶ Eigenschaften von (konvergenten) Folgen und Reihen sind analog zur reellen Analysis.
- ▶ Polynome $p(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$, $a_{\nu} \in \mathbb{C}$.
- ▶ $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$,
 $\cos(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.
- ▶ $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$.
- ▶ \exp ist nicht injektiv, periodisch mit Perioden $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ \sin , \cos haben genau dieselben Nullstellen wie in \mathbb{R} .
- ▶ Es existiert eine Umkehrfunktion $\text{Log} : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ zu $\exp z$, der Hauptzweig des Logarithmus, eindeutig bestimmt durch $-\pi < \text{Im Log } z \leq \pi$ und $\exp(\text{Log } z) = z$.
- ▶ $\text{Log}(z) = \log |z| + i \text{Arg}(z)$.
- ▶ Log ist nicht stetig entlang der negativen reellen Achse.

Komplexe Differenzierbarkeit

- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar in $a \in D$, falls $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} =: f'(a)$ existiert.
- ▶ Für D offen ist dies äquivalent zu:
 - ▶ f ist total differenzierbar in a und es gilt für die Tangentialabb.: $Tf(a)z = \ell z$ mit $\ell = f'(a)$, d.h. $Tf(a)$ ist \mathbb{C} -linear.
 - ▶ f ist total differenzierbar in a und für $u = \operatorname{Re}f$, $v = \operatorname{Im}f$ gelten:

die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u(a) = \partial_y v(a), \quad \partial_y u(a) = -\partial_x v(a).$$

- ▶ $\partial f = f'$, $\bar{\partial} f = 0$, mit
 $\partial f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$, $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$.
- ▶ Für D offen heisst f **holomorph** in D , falls f für alle $a \in D$ komplex differenzierbar ist.
 $\mathcal{O}(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$.
- ▶ Rechenregeln für f' : $\implies \mathcal{O}(D) \subset \mathcal{C}(D)$ ist \mathbb{C} -Unteralgebra.

Folgerungen aus komplexer Differenzierbarkeit

- ▶ f lokal konstant, wenn $\forall a \in D \exists U \subset D : f|_U$ ist konstant.
Äquivalent zu: $f \in \mathcal{O}(D), f'(z) = 0 \forall z \in D$.
- ▶ D heisst zusammenhängend, wenn jede lokal konstante Funktion $D \rightarrow \mathbb{C}$ konstant ist.
- ▶ Satz über die Umkehrfunktion: $f \in \mathcal{O}(D)$, injektiv, $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $f(D) \subset \mathbb{C}$ offen, $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(D))$ und $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.
- ▶ $\text{Log}(z) : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, nicht stetig entlang der negativen reellen Achse.
- ▶ $f \in \mathcal{O}(D), f = u + iv$. Dann sind u, v harmonisch, d.h. $\Delta u = \Delta v = 0$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Konforme Abbildungen

- ▶ Eine lineare, bijektive Abb. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst **konform**, wenn sie orientierungstreu ($\det T > 0$) und winkelerhaltend ($|x||y|\langle Tx, Ty \rangle = |Tx||Ty|\langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$) ist.
- ▶ $f : D \rightarrow D', D, D' \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist (im Kleinen) konform, falls $Tf(a)$ für alle $a \in D$ konform ist.
 f ist im Grossen konform, falls f auch noch bijektiv ist.
- ▶ $D \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ total differenzierbar. Dann gilt:
 $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f'(z) \neq 0 \forall z \in D \iff f$ ist konform. (Für eine Verallgemeinerung siehe weiter unten.)

Kurvenintegrale

- ▶ Glatte Kurve: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.
Geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

- ▶ Bogenlänge: $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

- ▶ Komplexes Integral: $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt,$$

- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, f stetig, $\operatorname{im} \gamma \subset D$.

$$\text{Kurvenintegral: } \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- ▶ \mathbb{C} -linear.

- ▶ Standardabschätzung: $\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq C L(\gamma)$, falls $|f(z)| < C$
für $z \in \operatorname{im} \gamma$.

- ▶ Verallgemeinerung des Riemann-Integrals.

- ▶ Transformationsinvarianz: $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma \circ \phi} f(\zeta) d\zeta$

- ▶ Fundamentalsatz: $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, falls eine
Stammfunktion F von f existiert.

- ▶ $\int_{\gamma_1 \pm \gamma_2} f(\zeta) d\zeta := \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta \pm \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta$

Der Cauchysche Integralsatz

- ▶ Es gilt für alle Kreisscheiben $B = B_r(c)$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$:

$$\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1 \end{cases}$$

- ▶ $D \subset \mathbb{C}$ heisst wegzusammenhängend, falls für alle $z, w \in D$:
 $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, im $\gamma \subset D$ mit $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w$.
 D wegzusammenhängend $\implies D$ zusammenhängend.
- ▶ Eine wegzusammenhgd., offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ heisst Gebiet.
- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, D ein Gebiet. Dann sind äquivalent:
 - ▶ f besitzt eine Stammfunktion
 - ▶ $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ für alle γ geschlossen, im $\gamma \subset D$
 - ▶ $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ hängt für alle Kurven γ nur von deren Anfangs- und Endpunkt ab.
- ▶ Für $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt der

Cauchysche Integralsatz für Dreieckswege:

$$\int_{\partial \Delta} f(\zeta) d\zeta = 0 \text{ für alle Dreiecke } \Delta \subset D.$$

Cauchyscher Integralsatz und logarithmische Ableitung

- ▶ Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heisst Sterngebiet, falls es $z_* \in D$ gibt, so daß für alle $z \in D$: $\{z_* + t(z - z_*) \mid t \in [0, 1]\} \subset D$.
- ▶ Für $f \in \mathcal{O}(D)$, D ein Sterngebiet, gilt der

Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete:

$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ , im $\gamma \subset D$.

- ▶ Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heisst Elementargebiet, falls jedes $f \in \mathcal{O}(D)$ eine Stammfunktion besitzt.
- ▶ Sei D ein Elementargebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. $h \in \mathcal{O}(D)$ heisst holomorpher Zweig des Logarithmus von f , falls $f = \exp \circ h$, $\frac{f'}{f}$ heisst logarithmische Ableitung von f .
- ▶ Ein holomorpher Zweig des Logarithmus von f existiert genau dann, wenn $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion besitzt.
- ▶ Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann gilt für alle geschlossenen Kurven γ mit $\text{im } \gamma \subset D$: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in \mathbb{Z}$

Die Cauchysche Integralformel

- ▶ $f \in \mathcal{O}(D)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, $r > 0$. Dann gilt $\forall z \in B_r(z_0)$ die **die Cauchysche Integralformel**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- ▶ f ist beliebig oft differenzierbar, jede Ableitung von f ist wieder holomorph, und für $\forall n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall z \in B_r(z_0)$ gilt **die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

- ▶ Leibnizregel für die Differentiation unter dem Integral
 $g : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, D offen, $\forall t \in [a, b]$ fest sei $g(t, -) \in \mathcal{O}(D)$, $\frac{\partial g}{\partial z} : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:
 $G(z) = \int_a^b g(t, z) dt \in \mathcal{O}(D)$ und $G'(z) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z} dt$.

Anwendungen der Cauchyschen Integralformeln

▶ **Satz von Liouville:**

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

▶ **Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes nicht konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle.

Falls $\deg p = n \geq 1$, dann existieren $C \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$ so dass $p(z) = C \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)$.

- ▶ **Satz von Morera:** Für $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und jeden Dreiecksweg $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ mit zugehöriger Dreiecksfläche $\Delta \subset D$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$. Dann ist f holomorph in D .

Gleichmässige Approximation

- ▶ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ heisst gleichmässig konvergent gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $z \in D$.

(f_n) konvergiert lokal gleichmässig gegen f , falls $(f_n|_{U \cap D})$ gleichmässig konvergiert für eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$.

- ▶ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmässig konvergente Folge *stetiger* Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$. Grenzfunktion ist *stetig* und darf mit Kurvenintegral (für alle γ stückweise glatt) vertauscht werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\zeta) d\zeta$$

- ▶ **Satz von Weierstraß:** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmässig konvergente Folge *holomorpher* Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$. Der Grenzfunktion f ist *holomorph*. Weiter dürfen Grenzwert und Ableitung vertauscht werden:

$$f' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'.$$

Normale Konvergenz

- ▶ Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n, f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ heisst (lokal) gleichmässig konvergent, falls die Folge der Partialsummen (lokal) gleichmässig konvergent ist.

Eine Reihe heisst normal konvergent in D , falls gilt:

$\forall a \in D \exists U(a) \subset D$ offen und $(M_n)_{n \geq 0}, M_n \geq 0$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ und $|f_n(z)| \leq M_n \forall z \in U(a) \cap D, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

- ▶ Eine normal konvergente Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmässig.
- ▶ **Satz von Weierstraß:** Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe mit $f_n \in \mathcal{O}(D)$. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D)$, Grenzfunktion und Ableitung dürfen vertauscht werden

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ konvergiert normal.

Cauchyscher Entwicklungssatz

- ▶ Zu jeder Potenzreihe um 0, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, existiert eine eindeutige bestimmte Zahl $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, der Konvergenzradius, so dass f in $B_R(0)$ normal konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ divergiert.
- ▶ Formel für Konvergenzradius: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R . Dann gilt:
 1. $R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. (Cauchy–Hadamard)
 2. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und der Grenzwert existiert.
- ▶ $f \in \mathcal{O}(D)$, $B_r(a) \subset D$, $r > 0$. Dann gilt

der Cauchysche Entwicklungssatz

$\forall z \in B_r(a)$, $0 < \rho < r$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius $R \geq r$.

Holomorphie

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- ▶ f ist holomorph, d.h. komplex differenzierbar in jedem $z \in D$.
- ▶ f ist total differenzierbar und $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ erfüllen die **Cauchy–Riemannschen DGL**
- ▶ f ist stetig und für jeden Dreiecksweg $\partial\Delta$, $\Delta \subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$
- ▶ f besitzt lokal eine Stammfunktion
- ▶ f ist stetig und besitzt eine Integraldarstellung durch die **Cauchysche Integralformel**
- ▶ f ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar
- ▶ f besitzt für alle $B_r(a) \subset D$ eine konvergente **Cauchysche Potenzreihenentwicklung**
- ▶ f ist konform, falls $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$

Rechenregeln für Potenzreihen

Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen auf D .

- ▶ Identitätssatz: Falls $f = g$, dann $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ Multiplikationssatz von Cauchy: Formel für Koeff. von fg
- ▶ Inversionssatz: Rekursionsformel für Koeff. von $1/f$
- ▶ Doppelreihensatz von Weierstrass
- ▶ Umordnungssatz: $\sum a_n (z - a)^n = \sum b_n (z - b)^n$ für $a, b \in D$.
- ▶ Verkettungssatz: Rekursionsformel für Koeff. von $f \circ g$
- ▶ Umkehrungssatz: Rekursionsformel für Koeff. von f^{-1} .

Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Seien im folgenden $f, g \in \mathcal{O}(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \neq \emptyset$.

- ▶ **Identitätssatz:** $f = g$
 $\iff \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ hat Häufungspunkt in D
 $\iff \exists z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \forall n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **Satz von der Gebietstreue** Sei f nicht-konstant.
Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.
- ▶ **Maximumprinzip:** Gilt $|f(a)| \geq |f(z)|$ für ein $a \in D$ und alle $z \in D$, dann ist f konstant.
- ▶ **Maximumprinzip für beschränkte Gebiete:** Sei D beschränkt, f stetig auf \bar{D} . Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂D an.
- ▶ **Minimumprinzip:** Ist f nicht konstant und gilt $|f(a)| \leq |f(z)|$ für ein $a \in D$ und alle $z \in D$, dann ist $f(a) = 0$.
- ▶ $\text{Aut}(D) := \{f : D \rightarrow D \mid f \text{ bijektiv, } f, f^{-1} \in \mathcal{O}(D)\}$.
 $\text{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \mid a \in \mathbb{E}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$.

Singularitäten holomorpher Funktionen

- ▶ Seien $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in \mathbb{C} \setminus D$, so dass die punktierte Kreisscheibe $\mathring{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$ in D liegt. a heisst isolierte Singularität von f
- ▶ a heisst **hebbar**, falls $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{a\})$ mit $\tilde{f}|_D = f$.
- ▶ **Riemannscher Hebbarkeitssatz**: f ist hebbar in $a \iff \exists$ punktierte Umgebung $\mathring{U} \subset D$ von a , so dass $f|_{\mathring{U}}$ beschränkt.
- ▶ a heisst ausserwesentlich, falls $\exists m \in \mathbb{Z}$, so dass $g(z) = (z - a)^m f(z)$ in a hebbar ist. Eine nicht-hebbare, ausserwesentliche Singularität a heisst **Pol(stelle)** von f .
 a heisst **wesentlich**, falls a nicht ausserwesentlich ist.
- ▶ Sei $k \in \mathbb{Z}$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, dann heisst $\text{ord}_a(f) := -k$ Ordnung von f in a .
- ▶ a ist ein Pol von $f \iff \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in D}} |f(z)| = \infty$.
- ▶ **Satz von Casorati-Weierstraß**: Für eine wesentliche Singularität a von f ist das Bild $f(\mathring{U} \cap D)$ einer beliebigen punktierten Umgebung \mathring{U} dicht in \mathbb{C} .

Laurent-Zerlegung

Seien $0 \leq r < R \leq \infty$. Sei $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ ein Ringgebiet und $f \in \mathcal{O}(\mathcal{R})$.

- ▶ Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete: Sind ρ, P so gewählt, dass $r < \rho < P < R$, dann gilt:

$$\oint_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) d\zeta = \oint_{|\zeta|=P} f(\zeta) d\zeta.$$

- ▶ Es existieren $g \in \mathcal{O}(B_R(0))$ und $h \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{r}}(0))$ (eindeutig, falls $h(0) = 0$), so dass $f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$.
- ▶ Die Zerlegung $f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$ heisst **Laurent-Zerlegung**, h ihr Hauptteil, g ihr Nebenteil. Die **Laurentreihe** von f in \mathcal{R} um 0 ist $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ mit a_n bestimmt durch $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < R$, und $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ für $|z| < \frac{1}{r}$.
Es gilt: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \rho < R$.

Anwendungen der Laurentreihe

- ▶ Sei $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D)$. a ist

| | | |
|-----------------------------|--------|---|
| hebbar | \iff | $a_n = 0, \quad \forall n < 0.$ |
| ein Pol der Ordnung $k > 0$ | \iff | $a_{-k} \neq 0, a_n = 0, \quad \forall n < -k.$ |
| wesentlich | \iff | $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0.$ |

- ▶ Seien $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b\}$ und $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in D$. Dann lässt sich f in eine normal konvergente, komplexe Fourierreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi inz) \quad \text{mit}$$

$$a_n = \int_0^1 f(z) \exp(-2\pi inz) dx$$

für alle $y \in (a, b)$ wobei $z = x + iy$.

Meromorphe Funktionen

- ▶ Die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist homöomorph zu S^2 mit der Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ gegeben durch die offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$, U offen, und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, $R > 0$.
- ▶ $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen, heisst meromorph, falls
 - ▶ $S(f) = f^{-1}(\infty)$ ist diskret in D
 - ▶ $f|_{D \setminus S(f)} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph
 - ▶ Die Punkte aus $S(f)$ sind Pole von $f|_{D \setminus S(f)}$.
 - ▶ $\hat{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ ist in der offenen Menge $\hat{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} \in D\}$ holomorph.
- ▶ $\mathcal{M}(D) := \{f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ meromorph}\}$ ist ein \mathbb{C} -Körper, $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{M}(D)$ ein \mathbb{C} -Unterring.
- ▶ $f = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}(D)$ heisst rationale Fkt. auf D , falls $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$. Es gilt: $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \{f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ rational}\} =: \mathbb{C}(z)$
- ▶ Jede bijektive rationale Abb. $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Möbiustranf. $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.
- ▶ $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \cong \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times \right\}$ als Gruppe.

Residuensatz

- ▶ Sei γ eine geschlossene glatte Kurve, $z \in \mathbb{C} \setminus \text{im}\gamma$. Die **Umlaufzahl** von γ bezügl. z ist $\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \in \mathbb{Z}$. $\text{ind}_\gamma(z)$ ist lokal konstant.
- ▶ Sei a eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D)$. Der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f um a heisst **Residuum** von f in a , $\text{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} f(\zeta) d\zeta$, ρ klein genug.
- ▶ Für $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$ mit ausserwesentlicher Singularität in a , $\text{ord}_a(f) = -k$, $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{Res}_a(f) = \frac{1}{(k-1)!} \tilde{f}^{(k-1)}(a)$,
 $\tilde{f}(z) = (z - a)^k f(z)$. Weiter $\text{Res}_a \left(\frac{f'}{f} \right) = \text{ord}_a f$ für $f \neq 0$.
- ▶ **Residuensatz** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_1, \dots, z_k \in D$, $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$, $\gamma : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ eine geschlossene glatte Kurve. Dann gilt

die Residuenformel

$$\oint_\gamma f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j}(f) \text{ind}_\gamma(z_j).$$

Anwendungen des Residuensatzes

- ▶ **Satz von Hurwitz:** D ein Gebiet, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{O}(D)$ lokal gleichmässig konvergent mit Grenzfkt. $f \in \mathcal{O}(D)$.
 - ▶ $f_n(z) \neq 0, \forall z \in D, n \in \mathbb{N} \implies f \equiv 0$ oder $f(z) \neq 0 \forall z \in D$.
 - ▶ $f_n(z)$ injektiv $\forall n \in \mathbb{N} \implies f = \text{const}$ oder f injektiv
- ▶ Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elem.gebiet $f \in \mathcal{M}(D)$, γ eine Kurve, die alle Pol- und Nullstellen von f genau einmal umläuft. Dann gilt:

die Anzahlformel für Pol- und Nullstellen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N(0) - N(\infty).$$

- ▶ Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq \text{const}$, $a \in D$, $b = f(a)$, $\text{ord}_a(f(z) - b) = n$. Dann gibt es offene Umg. $U \subset D$ von a und $V \subset \mathbb{C}$ von b , so dass $\forall w \in V, w \neq b, \exists z_1, \dots, z_n \in U$ mit $f(z_j) = w$ und $\text{ord}_{z_j}(f(z) - w) = 1, 1 \leq j \leq n$.
- ▶ **Satz von Rouché:** Sei D ein Elem.gebiet, $f, g \in \mathcal{O}(D)$, γ eine geschlossene Kurve in D mit $\text{ind}_{\gamma} z = 1 \forall z \in \text{Int}(\gamma)$. Sei $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|, \zeta \in \text{im}\gamma$. Dann haben $f, f + g$ keine Nullstelle auf $\text{im}\gamma$ und gleich viele Nullstellen in $\text{Int}\gamma$.

Berechnung von reellen Integralen

- ▶ Seien p, q Polynome in zwei Variablen, $q(x, y) \neq 0$
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(\cos t, \sin t)}{q(\cos t, \sin t)} dt = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{E}} \operatorname{Res}_a f$$

$$\text{mit } f(z) = \frac{\frac{1}{2} p\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)}{iz q\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)}$$

- ▶ Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elem. gebiet mit $\overline{\mathbb{H}} \subset D$, $a_j \in D$, $1 \leq j \leq k$,
 $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_k\})$, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ und
 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

- ▶ Es seien p, q Polynome vom Grad m, n . Dann gibt es reelle
Zahlen $K, L, R > 0$, so dass gilt:

$$K|z|^{m-n} \leq \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq L|z|^{m-n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R.$$

Berechnung von reellen Integralen

- ▶ Seien $a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\})$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_w(f(z)e^{i\lambda z}), \lambda > 0.$$

- ▶ Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit endlicher Polstellenmenge $S(f) \subset \mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ so dass $\lim_{z \rightarrow 0} (-z)^\lambda f(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} (-z)^\lambda f(z) = 0$. Dann gilt:

$$\int_0^{\infty} f(x)x^{\lambda-1} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \lambda}} \sum_{w \in \mathbb{C}_+} \operatorname{res}_w(f(z)(-z)^{\lambda-1}).$$

- ▶ Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

die Partialbruchentwicklung des Kotangens

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Unendliche Produkte

- Das **unendliche Produkt** $(1 + a_0)(1 + a_1) \dots$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Der Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} (1 + a_n) = \prod_{n=0}^{m-1} (1 + a_n) \exp\left(\sum_{n=m}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)\right)$$

existiert und wird mit $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ bezeichnet.

- Ein Produkt $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$, $f_n = 1 + g_n \in \mathcal{O}(D)$ heisst normal konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ normal konvergiert. In diesem Fall existiert die Grenzfunktion f mit $f \in \mathcal{O}(D)$. Insbesondere konvergiert jedes Produkt $\widehat{f}_N = \prod_{n \geq N} f_n$ normal und $f = f_0 f_1 \dots f_{N-1} \widehat{f}_N$.
- Sei $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$, $f_n \in \mathcal{O}(D)$, $f_n \neq 0$, normal konvergent. Dann gilt: $f \neq 0$, $N(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} N(f_n)$ und $\operatorname{ord}_a f = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ord}_a f_n$, für alle $a \in D$.
- Falls $f \neq 0$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}$ normal konvergent in $D \setminus N(f)$ und es gilt $\frac{f'}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}$.

Die Gamma-Funktion

- ▶ $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\operatorname{Re} z > 0$ heisst Gamma-Funktion.
- ▶ $\Gamma(z)$ ist für $\operatorname{Re} z > 0$ eine holomorphe Fkt. und ist in $\mathbb{C} \setminus S$, $S = \{0, -1, -2, \dots\}$ holomorph fortsetzbar, es gilt:
 - ▶ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus S$
 - ▶ $\Gamma(z)$ hat Pole 1. Ordnung in S mit $\operatorname{Res}_{-n}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}$.
 - ▶ $\Gamma(1) = 1$.
- ▶ $\Gamma(z)$ ist durch diese Eigenschaften und Beschränktheit in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$ eindeutig charakterisiert.
- ▶ Für alle $z \in \mathbb{C}$ besitzt $\Gamma(z)$ die Produktdarstellungen

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)\dots(z+m)}$$

- ▶ Weitere Eigenschaften:
 - ▶ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$
 - ▶ $\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz)$