Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 9

Abgabetermin 15.07.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.
Dieses Blatt ist das vorletzte bewertete Blatt.

Aufgabe 33. *Exponential einer Funktion mit isolierter Singularität.* Es sei U ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Welche Art von Singularität hat $\exp(f(z))$ in $z = z_0$

(a) falls z_0 eine Polstelle von f ist?

(b) falls z_0 eine wesentliche Singularität von f ist?

Aufgabe 34. *Maximumprinzip.* Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent ist zum Maximumprinzip (Satz 6.12 in Teil III der Vorlesung vom 24.06.):

> Für jedes beschränkte Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ und jede auf U holomorphe Funktion f, die eine stetige Fortsetzung $\bar{f}$ auf den Abschluss $\bar{U}$ von U in $\mathbb{C}$ besitzt, gilt: $\bar{f}$ nimmt sein Maximum auf dem Rand von U an.

Hinweis: Verwenden Sie für die Hin-Richtung den Identitätssatz.

Aufgabe 35. *Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe I.* Es sei $a \in \mathrm{D}_1(0)$. Zeigen Sie, dass

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

eine biholomorphe Abbildung $\phi_a\colon \mathrm{D}_1(0) \to \mathrm{D}_1(0)$ definiert mit $\phi_a(a) = 0$ und $\phi_a(0) = a$.

Hinweise: Zeigen Sie, dass $|\bar{a}z-1|^2 - |z-a|^2 = (1-|z|^2)(1-|a|^2)$. Für Biholomorphie zeigen Sie, dass $\phi_a \circ \phi_a = \mathrm{id}_{\mathrm{D}_1(0)}$.

Aufgabe 36. *Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe II.* Es sei $\phi\colon \mathrm{D}_1(0) \to \mathrm{D}_1(0)$ eine beliebige biholomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt: es existiert ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und ein $a \in \mathrm{D}_1(0)$, so dass $\phi(z) = \zeta\phi_a(z)$ für alle $z \in \mathrm{D}_1(0)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mithilfe von Aufgabe 27 angewandt auf ϕ und auf ϕ^{-1}, dass ζ existiert, falls $\phi(0) = 0$. (In diesem Fall kann man $a = 0$ wählen.)