http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Koecher.html

Darstellungstheorie von Köchern

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

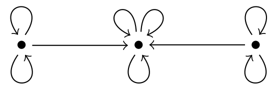
Sommersemester 2020

Die lineare Algebra befasst sich mit linearen Abbildung zwischen Vektorräumen. Eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W kann man nun grafisch als „Pfeil“ zwischen zwei „Knotenpunkten“ darstellen: $\bullet \longrightarrow \bullet$.

Dieses Bild lässt sich verallgemeinern zu sogenannten „Köchern“ (engl. *quiver*) — bestehend eben aus einer Ansammlung von Pfeilen, z.B.

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

oder



Eine *Darstellung* von einem Köcher ist nun gegeben durch die Wahl eines Vektorraums an jedem Knotenpunkt und eine lineare Abbildung für jeden Pfeil, z.B. für den linken Köcher

$$V_1 \xleftarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{h} V_4.$$

Um in die Theorie der Köcherdarstellungen einzusteigen, benötigt man tatsächlich nur Vorkenntnisse aus der linearen Algebra. Umso erstaunlicher ist es, dass Köcherdarstellungen nicht nur in der Darstellungstheorie, sondern auch in der algebraischen Geometrie bis hin zur mathematischen Physik weitreichende Anwendungen haben.

In diesem Seminar wollen wir die Darstellungstheorie von Köchern Schritt für Schritt entwickeln. Am Ende des Seminars behandeln wir den Satz von Gabriel über „darstellungsendliche“ Köcher, der beschreibt für welche Köcher sich beliebige Darstellungen aus endlich vielen unzerlegbaren Bausteinen zusammensetzen lassen. Erstaunlicherweise gibt es auch hier eine Verbindung zu anderen Teilen der Mathematik, nämlich zu Dynkin-Diagrammen, die z.B. in der Klassifizierung von Lie-Algebren eine fundamentale Rolle spielen.

Die Theorie der Köcherdarstellungen ist ein ausgezeichnetes Thema, um abstraktere Konzepte aus der Algebra (assoziative Algebren, Kategorien von Moduln, Anfänge der homologischen Algebra) kennenzulernen und dank der grafischen/diagrammatischen Herangehensweise ganz konkret zu veranschaulichen.

Literatur. Wir orientieren uns hauptsächlich an dem Buch [S]. Für das Buch [K] werden mehr Vorkenntnisse angenommen, es kann aber hilfreich sein um sich einen Überblick zu verschaffen (z.B. für die Vorbereitung der späteren Vorträge), da die ersten drei Kapitel den Inhalt des Seminars auf etwa 30 Seiten zusammenfassen.

Zu den Vorträgen

Beispiele. Wie bereits erwähnt lässt sich die Theorie der Köcherdarstellungen anhand von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen veranschaulichen. Wenn Sie neue Begriffe einführen, nutzen Sie dies gerne aus, indem Sie ganz konkrete Beispiele geben. Sie finden Beispiele im Haupttext sowie in den Übungsaufgaben (jeweils am Ende des Kapitels), können sich aber auch gerne andere oder zusätzliche Beispiele ausdenken — je nachdem wie es am besten in Ihren Vortrag passt.

Begriffe. Es wäre im Allgemeinen hilfreich, wenn Sie am Anfang ihres Vortrags eine Übersicht geben könnten, welche Begriffe oder Konzepte aus früheren Vorträgen für Ihren Vortrag wichtig sind, und gegebenenfalls Definitionen (auch wenn nur anhand von Beispielen) kurz wiederholen.

Beweise. In welchem Detail Sie die Beweise der einzelnen Resultate präsentieren können, hängt von dem Inhalt des jeweiligen Vortrags ab. Besser wäre es aber, zumindest bei ausgewählten Resultaten den Beweis (oder bestimmte Beweisschritte) zu erklären.

Sprache. Vorträge können gerne auf Englisch gehalten werden, was sich anbietet, da die Literatur auf Englisch ist. Wenn Sie den Vortrag auf Deutsch halten möchten, können Sie sich für die Übersetzung der Fachbegriffe gerne bei Herrn Barmeier melden.

Vortrag 1 (21.04.20). *Darstellungen von Köchern: Definitionen, Beispiele und das Krull–Schmidt Theorem* [S, §§1.1–1.2], [K, §1.1]

Dieser Vortrag soll Köcher und deren Darstellungen einführen und mit dem Krull–Schmidt Theorem enden. Führen Sie die Begriffe aus Definitionen 1.1–1.5 ein (zusammen mit Beispielen) und zeigen Sie Proposition 1.1 sowie das Krull–Schmidt Theorem 1.2. Begriffe aus der Kategorientheorie sind nicht Thema dieses Vortrags.

Vortrag 2 (28.04.20). *Kategorien I: Kern, Cokern, Exaktheit und kurze exakte Sequenzen* [S, §1.3]

Dieser Vortrag soll die Terminologie von Kern, Cokern, Exaktheit, die bereits aus der linearen Algebra bekannt sind, nun für Köcherdarstellungen einführen. Es bietet sich dabei an, die Sprache der Kategorien zu benutzen, die wir auch in den folgenden Vorträgen weiter benutzen werden. Führen Sie also die Definition einer Kategorie (Categories 2 auf S. 12) ein sowie die Begriffe aus Definitionen 1.8–1.12, um Kern, Cokern und Exaktheit in der Kategorie der Köcherdarstellungen (Categories 3) zu behandeln, und zeigen Sie Theorem 1.7, Proposition 1.8 sowie Folgerung 1.9. (Es reicht dabei, den Beweis von Prop. 1.8 nur zu skizzieren.) Zu Definition 1.10 geben Sie bitte auch Beispiel 1.10 an, da dies in den nächsten beiden Vorträgen eine Rolle spielt.

Vortrag 3 (05.05.20). *Kategorien II: Der* Hom-*Funktor* [S, §1.4]

Was aus der linearen Algebra als der „Vektorraum der linearen Abbildungen“ $\mathrm{Hom}(V, W)$ bekannt ist, kann man in der Sprache der Kategorien durch den Hom-*Funktor* beschrieben werden. Im Grunde genommen übersetzt diese Terminologie bestimmte Konstruktionen (wie „Rückzug“/Pullback), die ebenfalls in der linearen Algebra vorkommen, in die Sprache der Kategorien. Führen Sie demnach Funktoren ein (Categories 4) sowie die Resultate in 1.10–1.14 in §1.4, die das Zusammenspiel von dem Hom-Funktor und exakten Sequenzen behandeln. Als Vorbereitung zu Vorträgen 4 & 5 erwähnen Sie bitte auch Bemerkung 1.15 und Beispiel 1.12.

Vortrag 4 (12.05.20). *Auslander–Reiten Köcher: Erste Beispiele von Kategorien von Darstellungen* [S, §1.5]

In diesem Vortrag können wir bereits die Kategorie von Köcherdarstellungen für bestimmte Köcher veranschaulichen. Dies ist ein Beispiel von Auslander–Reiten Theorie (die auch für kompliziertere Köcher anwendbar ist).

Es soll dabei klar gemacht werden, inwieweit sich die Kategorie der Köcherdarstellungen in diesen Beispielen durch den Auslander–Reiten Köcher beschreiben lässt.

Vortrag 5 (19.05.20). *Einfache, Projektive und Injektive Darstellungen: Erste Schritte in homologischer Algebra* [S, §§2.1–2.2]

In diesem Vortrag sollen einfache, projektive und injektive Darstellungen eingeführt werden. Manche Darstellungen lassen sich zwar nicht als direkte Summe schreiben, aber dennoch als *Erweiterungen* von anderen kleineren Bausteinen (s. Vortrag 6).

Die Ergebnisse dieser Abschnitte lassen sich anhand von *Wegen* in dem Köcher formulieren (Definition 2.1 und Beispiel 2.2). Führen Sie dann einfache, projektive und injektive Darstellungen ein (Definition 2.2) und geben Sie einen Überblick über die Aussagen von Propositionen 2.3, 2.7, 2.8 und 2.9 und Theorem 2.11. (Im Vordergrund sollten hierbei die Aussagen für projektive Darstellungen stehen.) Auch wenn sich in diesem Vortrag nicht alle Beweise erklären lassen, sollten Sie zumindest für ausgewählte Resultate eine Beweisidee skizzieren. Enden Sie mit Definition 2.3 (§2.2) und der Aussage von Theorem 2.15.

Vortrag 6 (26.05.20). Ext-*Gruppen: Erweiterung von Darstellungen* [S, §2.4]

Thema dieses Vortrags sind die Erweiterungsgruppen von Darstellungen, mit denen sich neue unzerlegbare Darstellungen aus kleineren Darstellungen (z.B. einfache oder projektive Darstellungen aus Vortrag 5) „bauen“ lassen.

Kein Vortrag am 02.06. (Pfingstpause)

Vortrag 7 (09.06.20). *Ringe und Algebren: Die Wegealgebra eines Köchers* [S, §4.2 & §4.4]

In diesem und dem nächsten Vortrag werden Köcherdarstellungen in ein anderes Licht gestellt: Darstellungen können nämlich alternativ als *Moduln* über der sogenannten *Wegealgebra* eines Köchers aufgefasst werden.

Dafür wiederholen Sie zunächst die Definition einer Algebra (Definition 4.4) und den Begriff der Wege (Definition 2.1) und führen dann die Wegealgebra ein, zusammen mit Lemma 4.3. Zeigen Sie, dass die Wegealgebra sich als eine Art Matrixalgebra schreiben lässt; führen Sie Idempotente aus Definition 4.12 und Lemma 4.12 ein.

Vortrag 8 (16.06.20). *Moduln: Die Kategorie der Köcherdarstellungen als Modul-Kategorie* [S, §4.3 & §5.2]

Ziel dieses Vortrags ist zu zeigen, dass die Kategorie der (endlich-dimensionalen) Köcherdarstellungen äquivalent ist zu der Kategorie der endlich erzeugten Moduln für die Wegealgebra.

Führen Sie den Begriff eines *Moduls* ein (Definition 4.8) sowie die Begriffe von endlich erzeugten Moduln und Morphismen von Moduln (Definitionen 4.9 & 4.10) und zeigen Sie Proposition 4.8.

Erklären Sie, was es bedeutet, dass zwei Kategorien äquivalent sind (Categories 5 auf S. 54) und zeigen Sie Theorem 5.4 für den Fall $I = 0$ (einige Schritte des Beweises fallen damit weg).

Vortrag 9 (23.06.20)**.** *Varietäten von Darstellungen* [S, §8.1]

In diesem Vortrag sollen Varietäten von Darstellungen eingeführt werden, die es später erlauben, mit Dimensionen von Orbiten/Bahnen zu argumentieren. Orbiten unter einer Gruppenwirkung von $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sind bereits aus der linearen Algebra bekannt — für Köcherdarstellungen betrachtet man hier den Vektorraum aller Darstellungen eines bestimmten Dimensionsvektors. Erklären Sie dies und zeigen Sie dazu Lemmas 8.1–8.3.

Vortrag 10 (30.06.20)**.** *Quadratische Formen* [S, §8.2]

Quadratische Formen und Bilinearformen sind ebenfalls aus der linearen Algebra bekannt (vgl. Skalarprodukt) und können nun für Köcher eingeführt werden. Zeigen Sie Proposition 8.4, die die quadratische Form eines Köchers anhand von Endomorphismen und Selbsterweiterungen ausdrückt.

Definieren Sie Dynkin-Diagramme (S. 82–83) und euklidische Diagramme (S. 210–211), wiederholen Sie die Definition von positiver (Semi)Definitheit (Definition 8.1) und zeigen Sie Lemma 8.5 und Theorem 8.6.

Vortrag 11 (07.07.20)**.** *Wurzelsysteme: Dynkin-Diagramme* [S, §8.3]

Führen Sie Wurzeln ein und zeigen Sie Lemma 8.7 sowie Folgerung 8.9 und geben Sie positive Wurzeln für eine Auswahl Dynkin und euklidischer Diagramme an. Wie dann im nächsten Vortrag gezeigt wird, entsprechen die positiven Wurzeln dieser Diagramme genau den unzerlegbaren Darstellungen (bis auf Isomorphie).

Vortrag 12 (14.07.20)**.** *Satz von Gabriel: Darstellungs-endliche Köcher* [S, §8.4]

In diesem Vortrag kann nun der Satz von Gabriel — die Klassifizierung der „darstellungs-endlichen“ Köcher — bewiesen werden. Zeigen Sie dazu Proposition 8.10 sowie Folgerung 8.11 und dann den Satz von Gabriel 8.12.

Vortrag 13 (21.07.20)**.** *Auslander-Reiten Theorie: Die Kategorie der Darstellungen vom Typ A_n* [S, §3.1] **oder** *Der Kronecker-Köcher: Ein Beispiel eines darstellungs-unendlichen Köchers* [K, §7.7]

Für diesen Vortrag können Sie zwischen den folgenden Themen wählen.

- Entweder Sie orientieren sich an [S, §3.1] (insb. §3.1.1, §3.1.3–3.1.4) und zeigen (ähnlich wie in Vortrag 4), wie die Kategorie der Köcherdarstellungen für Köcher vom Typ A_n anhand von Auslander–Reiten Theorie beschrieben werden kann.

- Oder Sie zeigen die Klassifizierung von unzerlegbaren Darstellungen für den sogenannten Kronecker-Köcher, die in [K, §7.7] beschrieben ist. Dieser Köcher hat unendlich viele unzerlegbare Darstellungen, die sich allerdings konkret beschreiben lassen. Für diesen Köcher gibt es zudem einen schönen Zusammenhang zur Klassifizierung von Bilinearformen aus der klassischen linearen Algebra (und später auch Bezüge zur algebraischen Geometrie).

Literatur

[S] R. Schiffler, *Quiver representations*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2014

[K] A. Kirillov Jr., *Quiver representations and quiver varieties*, Graduate Studies in Mathematics 174, AMS, 2016