Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Probeklausur Lineare Algebra 1

Ausgabe: 21. Dezember 2006

Die vorgesehene Bearbeitungszeit sind 120 Minuten, es sollten **keine** Hilfsmittel benutzt werden.

Aufgabe 1 (16=4+4+4+4 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition des Begriffs "Gruppe" an.
2. Sei M eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass
$$S = \{f : M \to M \mid f \text{ ist bijektiv } \}$$
eine Gruppe bezüglich der Komposition $\circ$ ist, wobei für $f, g \in S$:
$$f \circ g(x) = f(g(x)) \text{ für alle } x \in M\,.$$
3. Sei nun $(M, +)$ zusätzlich eine Gruppe bezüglich einer Verknüpfung $+$ und definiere eine Verknüpfung $+$ auf $\mathrm{Abb}(M, M)$ durch
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in M, f, g \in \mathrm{Abb}(M, M)\,.$$
Ist $(S, +)$ eine Gruppe? (Beweis oder Gegenbeweis!)
4. Sei nun $M = \mathbb{R}^2$ und $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Man definiere die Abbildung
$$f_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}\,.$$
Ferner sei
$$G = \{f_u \mid u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, ad - bc \neq 0\}\,.$$
Zeigen Sie:
   - G ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
   - G ist nicht abelsch.

Aufgabe 2 (16=4+4+4+4 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition des Begriffs "Schiefkörper" an.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Schiefkörper an, der kein Körper ist (ohne Beweis).
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Körper K an, so dass $K \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (mit Nachweis, dass dies tatsächlich ein Körper ist).
4. Sei $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}, p \mapsto p(0)$.
   - Zeigen Sie, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.
   - Ist φ injektiv?
   - Ist φ surjektiv?

Aufgabe 3 (16=4+4+4+4 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra.
2. Sei K eine Körper und $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
   - Zeigen Sie: Sind $P, Q \in K[x]$ Polynome vom Grad $\deg P, \deg Q \leq n$ mit

     $$P(x_i) = y_i \text{ und } Q(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, n,$$

     dann ist $P = Q$.
   - Finden Sie $Q_i \in K[x]$ vom Grad $\deg Q_i \leq n$, so dass

     $$Q_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j\,. \end{cases}$$

     (Hinweis: betrachten Sie $\tilde{Q}_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - x_j)$)
   - Konstruieren Sie ein Polynom $P \in K[x]$ mit $P(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

Aufgabe 4 (16=4+4+4+4 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition des Begriffs "Vektorraum" an.
2. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? (Warum oder warum nicht?)

$$\{f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(4) = 0\}$$
$$\{f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 4\}$$
$$\{f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist surjektiv}\}$$
$$\{f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist injektiv}\}$$

3. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Man definiere die Abbildung

$$T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v\,.$$

Weiter definiere man auf

$$T(\mathbb{R}^2) = \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^2\}$$

die Verknüpfung $\oplus$ durch

$$T_v \oplus T_w = T_{v+w} \quad \text{für } T_v, T_w \in T(\mathbb{R}^2)$$

sowie eine skalare Multiplikation $\odot$ durch

$$\lambda \odot T_v = T_{\lambda v} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, T_v \in T(\mathbb{R}^2)\,.$$

Zeigen Sie: $T(\mathbb{R}^2)$ ist mit diesen Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

4. Sei K ein Körper und $K_{\leq 3}[x] = \{p \in K[x] \mid \deg p \leq 3\}$.

   - Zeigen Sie, dass $K_{\leq 3}[x]$ ein Unterraum des K-Vektorraums $K[x]$ ist.
   - Sei $q_i(x) = 1 + x + \ldots + x^i$, $i = 0, \ldots, 3$. Zeigen Sie, dass $(q_i)_{i=0,1,2,3}$ linear unabhängig ist.
   - Zeigen Sie, dass $(q_i)_{i=0,1,2,3}$ ein Erzeugendensystem ist.

*** **** *** ** *** *** *** ** *** **** ** *** **** * ** *** *****

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!

*** **** *** ** *** *** *** ** *** **** ** *** **** * ** *** *****