Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 1

1. Normale Räume

   (a) (2 Punkte) Betrachte den topologischen Raum $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Äquivalenzrelation erzeugt durch $x \sim -x, \forall |x| > 1$. Sei $Y = X/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass Y kein Haussdorfraum ist.

   (b) (2 Punkte) Ein topologischer Raum X heisst normal genau dann, wenn für alle disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Umgebungen $U, V \subset X$ existieren, also $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (X, d) normal ist.

2. (4 Punkte) Produktmannigfaltigkeiten
   Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Zeigen Sie, dass dann auch auf $M \times N$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit definiert werden kann. Was ist die Dimension dieser Mannigfaltigkeit ?

3. (4 Punkte) Neilsche Parabel
   Betrachten Sie die Kurve $X = \{y^2 - a^2x^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, wobei a ein reeller Parameter ist. Finden Sie eine Überdeckung von X mit Karten, die keinen glatten Überlapp haben.

4. $\mathbb{RP}^n$
   Der reell projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge der Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir identifizieren zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf einer Geraden, indem wir die Äquivalenzrelation $\sim$ dadurch definieren, dass $x \sim y$, wenn es ein $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ gibt, so dass $y = ax$. Dann sei

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right) / \sim \ .$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ mit $U_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x^i \neq 0\}$ und $\phi_i = \{\xi^1_{(i)}, \ldots, \widehat{\xi^i_{(i)}}, \ldots, \xi^{n+1}_{(i)}\} : U_i \to \mathbb{R}^n$ ein wohldefinierter Atlas ist, wobei $\xi^j_{(i)}(x) = x^j/x^i$ und $\widehat{\xi^i_{(i)}}$ bedeutet, dass $\xi^i_{(i)}$ weggelassen wird. Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen $\psi_{ji} = \phi_j \phi_i^{-1}$.

(b) (2 Punkte) Wir definieren auf der n-Sphäre S^n die antipodale Abbildung $f : S^n \to S^n, x \mapsto -x$ und eine Äquivalenzrelation $\sim_f$, unter der x und $f(x)$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass

$$S^n / \sim_f \ = \mathbb{RP}^n\,,$$

wobei $=$ für einen Homöomorphismus steht.