Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 10

37. Isometrie–Invarianz des Zusammenhangs und der Krümmung
Es seien (M, g) und $(N, \widetilde{g})$ semi–Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi–Civita Zusammenhängen D bzw. $\widetilde{D}$. Für einen beliebigen Diffeomorphismus $f : M \to N$ heisst ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ f–verwandt zu $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(N)$, falls für alle $p \in M$ gilt, dass $\widetilde{X}|_{f(p)} = \mathrm{d}f_p X|_p$. Es sei nun $f : (M, g) \to (N, \widetilde{g})$ eine Isometrie und $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ seien f–verwandt zu $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ bzw. $\widetilde{Z} \in \mathcal{X}(N)$. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (2 Punkte) $D_X Y$ ist f–verwandt zu $D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$.

    (b) (2 Punkte) $R_{X,Y} Z$ ist f–verwandt zu $R_{\widetilde{X},\widetilde{Y}} \widetilde{Z}$. (Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 10 d).)

38. Kürzeste
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : (-1, 1) \to M$ eine stetige, stückweise glatte Kurve mit Bogenlänge $L[\gamma]$ und Energie $E[\gamma]$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt: $L[\gamma]^2 \leq 2E[\gamma]$. Gleichheit gilt genau dann, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. wenn $\|\dot{\gamma}\| \equiv \text{const}$.

    (b) (1 Punkt) Geben Sie ein Beispiel für eine Geodätische, die nicht Kürzeste ist.

    (c) (1 Punkt) Es sei H die obere Halbebene mit der Poincaré–Metrik h aus Aufgabe 28. Kürzeste verlaufen auf Halbkreislinien mit Mittelpunkt auf $\mathbb{R}$ oder Geraden, die senkrecht auf $\mathbb{R}$ stehen.

    (d) (1 Punkt) Es sei $D = \{w \in \mathbb{C} | |w| < 1\}$ die Kreisscheibe aus Aufgabe 28 mit der Metrik $g = \frac{4}{(1-|w|^2)^2} \mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}\bar{w}$. Beschreiben Sie die Kürzesten.

39. (4 Punkte) 2.Variationsformel für die Energie
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : (-1, 1) \to M$ eine Geodätische mit Energie $E[\gamma]$. Es sei H eine glatte Variation von γ mit festen Endpunkten und Variationsfeld V. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} E[\gamma_s]\bigg|_{s=0} = \int_a^b \left(\left\langle \frac{D}{\mathrm{d}t} V, \frac{D}{\mathrm{d}t} V \right\rangle - \langle R_{V,\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, V \rangle \right) \mathrm{d}t$$

40. Verallgemeinerte Abstandsfunktion
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heisst verallgemeinerte Abstandsfunktion, falls $\|\mathrm{grad} f\| = 1$. Dabei ist $\mathrm{grad}_p f$ der Tangentialvektor in $T_pM, p \in M$ gegeben durch $\langle \mathrm{grad}_p f, X\rangle = \mathrm{d}f_p(X)$ für alle $X \in T_pM$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Die Hessesche Abbildung H^f (cf. Aufgabe 30) erfüllt $H^f(X, Y) = \langle D_X(\mathrm{grad} f), Y\rangle$.

(b) (2 Punkte) Es sei $f \in \mathcal{F}(M)$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion. Dann sind die Integralkurven von $\mathrm{grad} f$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

Abgabetermin: Mittwoch, 16. 1. 2008 um 10:00 Uhr.