Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 11

41. (4 Punkte) Krümmungstensor der Schwarzschildmetrik
Es sei g die Schwarzschildmetrik auf S_M wie in Aufgabe 29. Bestimmen Sie die Komponenten des Krümmungstensors R von g.

42. Gauss–, Codazzi– und Ricci–Gleichungen
Es seien $(M, g, D), (\overline{M}, \overline{g}, \overline{D})$ und $(N_j M, \overline{g}|_{N_j M}, D^\perp)$ die semi–Riemannschen Mannigfaltigkeiten aus Aufgabe 34 und $R, \overline{R}, R^\perp$ die dazugehörigen Krümmungstensoren. Zeigen Sie, dass für $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ und $\xi \in \Gamma(N_j M)$ und mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 34 gilt:

   (a) (1 Punkt) Gauss–Gleichung
$$(\overline{R}_{X,Y}\mathrm{d}j(Z))^{\tan} = \mathrm{d}j(R_{X,Y}Z) + \mathrm{d}j(A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,Z)}X)$$

   (b) (1 Punkt) Codazzi–Gleichung
$$(\overline{R}_{X,Y}\mathrm{d}j(Z))^{\perp} = (D^\perp_X \mathrm{II})(Y, Z) - (D^\perp_Y \mathrm{II})(X, Z)$$

   (c) (1 Punkt) Codazzi–Gleichung
$$(\overline{R}_{X,Y}\xi)^{\tan} = \mathrm{d}j\left((D_Y A)_\xi X - (D_X A)_\xi Y\right)$$

   (d) (1 Punkt) Ricci–Gleichung
$$(\overline{R}_{X,Y}\xi)^{\perp} = R^\perp_{X,Y}\xi + \mathrm{II}(A_\xi X, Y) - \mathrm{II}(X, A_\xi Y)$$

43. Hauptkrümmungen und Riccati–Gleichung
Es (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $f \in \mathcal{F}(M)$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion (cf. Aufgabe 40). Die Niveaumengen $P_s = \{p \in M | f(p) = s\}$ von f sind glatte Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $n-1$ und $\xi_p = \mathrm{grad}_p f$ ist ein Einheitsnormalenvektor auf $P_{f(p)}$ in p. Die Weingarten–Abbildung A (cf. Aufgabe 34) lautet dann $A_{\xi,p} : T_p P_s \to T_p P_s, X \mapsto -D_X \xi = -D_X \mathrm{grad}_p f$. Ihre Eigenwerte $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ von A_ξ heissen Hauptkrümmungen von P_s in M im Punkt p. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Die Hauptkrümmungen sind die Eigenwerte der Hesseschen Abbildung H^f.

(b) (2 Punkte) Die Riccati–Gleichung $D_\xi A_\xi = R_\xi + {A_\xi}^2$ ist erfüllt. Dabei ist $R_\xi(X) = R_{X,\xi}\xi$.

44. (4 Punkte) Theorema egregium (Gauss)
Es sei $i : M \to \mathbb{R}^3$ eine semi–Riemannsche Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$. Die einzige Schnittkrümmung heisst Gauss–Krümmung K. Zeigen Sie, dass die Gauss–Krümmung von der ersten Fundamentalform und ihren Ableitungen, aber nicht von der Einbettung abhängt. Wählen Sie dazu ein lokales orthogonales Koordinatensystem (u, v) auf M, in dem in der ersten Fundamentalform $g = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$ die Komponente $F = 0$ gesetzt werden kann.

Abgabetermin: Mittwoch, 23. 1. 2008 um 10:00 Uhr.