PROF. KATRIN WENDLAND
DR. EMANUEL SCHEIDEGGER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT AUGSBURG

RIEMANNSCHE GEOMETRIE I
WS 07/08

Übungsblatt 12

45. (4 Punkte) Schwarzschild–Lösung der Einstein–Gleichung
Zeigen Sie, dass die Schwarzschild–Metrik g aus Aufgaben 29 und 41 die Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum $\mathrm{Ric}_g - \frac{1}{2}sg = 0$ erfüllen.

46. (4 Punkte) Orientierung von Mannigfaltigkeiten
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit dem Volumenelement dvol_M aus Aufgabe 25. In der Aufgabe wurde gezeigt, dass dvol_M global wohldefiniert ist, wenn die Matrix jedes Kartenwechsels positive Determinante hat. Eine glatte Mannigfaltigkeit M heisst orientierbar, falls ein maximaler Atlas $\mathcal{A}$ auf M existiert, so dass für alle Karten $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt: $\det\left(\mathrm{d}\,(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}\right) > 0$ für alle $p \in U \cap V$. Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, falls eine n–Form $\omega \in \Lambda^n(T^*M)$ mit der Eigenschaft $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ existiert. Falls M semi–Riemannsch ist, zeigen Sie, dass ω mit dvol_M identifiziert werden kann. (So ein Atlas heisst Orientierung von M und M versehen mit einer Orientierung heisst orientierte Mannigfaltigkeit.)

47. Integration auf Mannigfaltigkeiten
Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit wie in Aufgabe 46 mit Volumenform ω. Eine Teilmenge $A \subset M$ heisst messbar (Nullmenge), falls für alle Karten (U, ϕ) eines Atlanten $\mathcal{A}$ die Menge $\phi(U \cap A)$ Lebesque–messbar (Lebesque–Nullmenge) ist. Eine Karte (U, ϕ) heisst positiv–orientiert, falls $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ eine positiv–orientierte Basis des Vektorraums T_pM für alle $p \in U$ ist.

   (a) (2 Punkte) Es sei $A \subset M$ messbar und enthalten in einer positiv–orientierten Karte (U, ϕ). Das Integral von ω über A ist definiert durch das Lebesque–Integral $\int_A \omega = \int_{\phi(A)} (\omega_\phi \circ \phi^{-1})\,\mathrm{d}^n x$ mit $\omega_\phi(p) = \omega_p(\partial_1, \ldots, \partial_n)$. (D.h. man integriert die lokalen Koeffizienten der Form ω über dem Koordinatenbereich von A.) Zeigen Sie, dass $\int_A \omega$ unabhängig von der gewählten Karte ist.

   (b) (2 Punkte) Es sei weiter $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein positiv–orientierter, abzählbarer Atlas auf M mit einer Zerlegung der Eins $\{\chi_i\}_{i \in I}$. Dann definieren wir $\int_A \omega = \sum_{i \in I} \int_{A \cap U_i} \chi_i \omega$. Zeigen Sie, dass $\int_A \omega$ unabhängig vom Atlas $\mathcal{A}$ und der Zerlegung der Eins ist.

48. Satz von Gauss–Bonnet (lokal)

Es sei (M, g) eine zwei–dimensionale, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine Umgebung, so dass $\overline{U}$ diffeomorph zu einer Kreisscheibe in einem Kartenbereich $\widetilde{U}$ von M ist. K bezeichne die Schnittkrümmung von M.

(a) (1 Punkt) Es seien $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\widetilde{U})$ und bilden in jedem Punkt $p \in \widetilde{U}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pM. Betrachte die 1–Form $\alpha \in \Lambda^1(T^*M)$ gegeben durch $\alpha(Y) = g(X_1, D_Y X_2)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\alpha = K \mathrm{dvol}_M|_{\widetilde{U}}$.

(b) (1 Punkt) Es sei $\gamma : (-1, 1) \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Tangentialvektorfeld $X(t)$ und Normalenvektorfeld $\xi(t)$, so dass (X, ξ) positiv orientiert sind. Zeigen Sie, dass eine Funktion $k_g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, genannt geodätische Krümmung von γ, existiert, so dass $\frac{D\gamma'}{\mathrm{d}t} = k_g(t)\xi(t)$ gilt. Was ist die geodätische Krümmung einer Geodätischen ?

(c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [0, l] \to \partial U$ eine Parametrisierung auf Bogenlänge von ∂U. Zeigen Sie, dass $\int_{\partial U} \alpha = -\int_{\partial U} k_g + 2\pi$, indem Sie (X_1, X_2) als Resultat einer Drehung von (X, ξ) darstellen.

(d) (1 Punkt) Schliessen Sie, dass $\int_U K \mathrm{dvol}_M + \int_{\partial U} k_g = 2\pi$.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. 1. 2008 um 10:00 Uhr.