Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 2

5. (4 Punkte) Zerlegung der Einheit
Sei $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine endliche offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Eine Familie von stetigen Funktionen $\phi_i : X \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$, heisst (endliche) Zerlegung der Einheit, falls für alle i gilt: $\overline{\phi_i^{-1}([0,1])} \subset U_i$ und für alle x ist $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$. Zeigen Sie, dass für jeden normalen Raum X eine endliche Zerlegung der Eins existiert.
Nehmen Sie dazu zuerst eine beliebige endliche offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ von X und zeigen Sie, dass sie zu einer offenen Überdeckung $\{V_1, \ldots, V_n\}$ mit $\overline{V_i} \subset U_i$ für jedes i "geschrumpft" werden kann. Benutzen Sie dann das Lemma von Urysohn:
Seien A und B disjunkte geschlossene Untermengen von X und sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein geschlossenes Intervall. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [a, b]$ so, dass $f(x) = a$ für jedes $x \in A$ und $f(x) = b$ für jedes $x \in B$.

6. Richtungsableitung
Seien $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma : (-1, 1) \to U$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$. Setzen Sie $X = \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die Richtungsableitung D_X in Richtung X als Operator $D_X : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ durch

$$D_X f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f \circ \gamma(t) \right) |_{t=0}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) (1 Punkt) D_X ist wohldefiniert, d. h. D_X ist unabhängig von der Wahl der Kurve γ.

(b) (1 Punkt) Für festes p bildet die Menge aller durch $X \in \mathbb{R}^n$ definierten Richtungsableitungen D_X einen $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(c) (1 Punkt) Für festes p und $X \in \mathbb{R}^n$ gilt: $D_X \in T_p U$.

(d) (1 Punkt) Für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt: $D_X f = \mathrm{d}f_p(X)$, wobei $\mathrm{d}f_p$ das Differential aus der mehrdimensionalen Analysis ist.

7. Tangentialvektoren auf S^2
Sei S^2 parametrisiert durch

$$x = r\sin\theta\sin\phi, \qquad y = r\cos\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\phi.$$

Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma : (-1,1) \to S^2,\ t \mapsto \frac{1}{2}\left((1-t)\cos\left(\tfrac{t\pi}{2}\right), (t-1)\sin\left(\tfrac{t\pi}{2}\right), \sqrt{(1+t)(3-t)}\right)$$

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren an γ in kartesischen (x,y,z), sphärischen (r,θ,ϕ), und stereographischen Koordinaten ($\xi = \frac{x}{r-z}, \eta = \frac{y}{r-z}$).

(b) (1 Punkt) Sei $\{(U_N,\phi_N),(U_S,\phi_S)\}$ der durch die stereographische Projektion gegebene Atlas. Bestimmen Sie die Transformation der Tangentialvektoren unter Koordinatenwechsel von U_N nach U_S.

(c) (1 Punkt) Finden Sie eine weitere Kurve $\widetilde{\gamma}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = p$, so dass $\widetilde{X} = \widetilde{\gamma}'(0)$ linear unabhängig von $X = \gamma'(0)$ ist.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass X und $\widetilde{X}$ eine Basis von Tangentialvektoren für S^2 liefern.

8. Hessesche Abbildung
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $f \in \mathcal{F}(M)$ eine glatte Funktion. Ein Punkt $p \in M$ heisst kritischer Punkt von f, wenn $\mathrm{d}f_p = 0$, die Nullabbildung. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) (1 Punkt) An einem kritischen Punkt p existiert eine bilineare, symmetrische Abbildung $H : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ mit

$$H(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = \left.\frac{\partial^2(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\phi(p)}, \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

wobei ϕ eine Karte von M um p ist.

(b) (1 Punkt) H ist unabhängig von der Wahl der Karte ϕ.

(c) (1 Punkt) Für eine Kurve γ mit $\gamma(0) = p$ sei D_X die Richtungsableitung entlang γ wie in Aufgabe 6. Es gilt $H(D_X, D_X) = (f\circ\gamma)''(0)$.

(d) (1 Punkt) Bestimmen Sie H für die Basis von Tangentialvektoren an S^2 in stereographischen Koordinaten.

Abgabetermin: Mittwoch, 7. 11. 2007 um 10:00 Uhr.