Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 3

9. Eigenschaften von Differentialen

   (a) (2 Punkte) Matrixdarstellung
   Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten um p bzw. $f(p)$ mit $f(U) \subset V$, so dass $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $y = \psi(f(p)) \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix des Differentials $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ bezüglich der Basen $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right\}_{i=1}^m$ für T_pM und $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}\right\}_{j=1}^n$ für $T_{f(p)}N$.

   (b) (2 Punkte) Kettenregel
   Seien M, N und f wie oben, P eine glatte Mannigfaltigkeit und $g : N \to P$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass für das Differential der zusammengesetzten Abbildung $g \circ f : M \to P$ gilt:

$$\mathrm{d}(g \circ f)|_p = \mathrm{d}g|_{f(p)} \circ \mathrm{d}f|_p.$$

10. Lie–Klammer
Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ zwei glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Die Lie–Klammer ist das wie folgt definierte Vektorfeld:

$$\forall p \in M,\ \forall f \in \mathcal{F}(M): \qquad [X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für alle $p \in M$ die Abbildung $p \mapsto [X, Y]_p$ ein glattes Vektorfeld ist, und drücken Sie es in Koordinaten $x = \phi(p)$ in einer Karte (U, ϕ) um p aus.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine $\mathbb{R}$-bilineare und antisymmetrisch Abbildung ist, sowie die Jacobi–Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

   erfüllt. Das rechtfertigt die Bezeichnung Lie–Klammer für $[X, Y]$.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Lie-Klammer nicht $\mathcal{F}(M)$–bilinear ist.

(d) (1 Punkt) Seien M, N und f wie in Aufgabe 9(a). Seien $V, W \in \mathcal{X}(N)$, so dass $\mathrm{d}f|_p(X_p) = V_{f(p)}$ und $\mathrm{d}f|_p(Y_p) = W_{f(p)}$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{d}f|_p([X,Y]_p) = [V,W]_{f(p)}$ für beliebiges p gilt.

11. Koordinaten auf $\mathrm{SO}(n)$.

(a) (2 Punkte) Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, wobei $M \subset \mathbb{R}^m$ ein topologischer Unterraum ist. Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um folgendes zu zeigen: Wenn das Differential $\mathrm{d}f|_p$ in jedem Punkt konstanten Rang $k \leq n$ besitzt, dann existieren für jedes $p \in M$ Karten (U, ϕ) von M um p und (V, ψ) von $\mathbb{R}^n$ um $f(p)$, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ folgende Form annimmt:

$$(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Später wird gezeigt: Auf diese Weise wird $f^{-1}(q)$ für jedes $q \in f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $m - k$.

(b) (2 Punkte) Versehen Sie den Raum $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$ Matrizen mit der Topologie und der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | A \cdot A^T = E, \det A = 1\}$ die Gruppe der speziellen orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\mathrm{SO}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Folgern Sie, dass die Koeffizienten der Matrizen in $\mathrm{SO}(n)$ zur Parametrisierung von $\mathrm{SO}(n)$ verwendet werden dürfen.

12. Rechts- und linksinvariante Vektorfelder auf $\mathrm{SO}(n)$.
Für $A \in \mathrm{SO}(n)$ betrachte die Diffeomorphismen $R_A : B \mapsto B \cdot A$ und $L_A : B \mapsto A \cdot B$ von $\mathrm{SO}(n)$. Als Lie–Algebra von $\mathrm{SO}(n)$ bezeichnet man den Vektorraum $\mathfrak{so}(n) = T_E SO(n) = \{V \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | V = -V^T\}$ mit der Lie–Klammer $[V,W]_{\mathfrak{so}} = V \cdot W - W \cdot V$. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Für $V \in \mathfrak{so}(n)$ werden durch $X_V^R(A) = V \cdot A$ und $X_V^L(A) = A \cdot V$ glatte tangentiale Vektorfelder auf $\mathrm{SO}(n)$ definiert.

(b) (1 Punkt) X_V^R ist ein rechts–invariantes Vektorfeld auf $\mathrm{SO}(n)$, d.h. für $V \in \mathfrak{so}(n)$ und für alle $A, B \in \mathrm{SO}(n)$ gilt:

$$\mathrm{d}R_A \left(X_V^R(B) \right) = X_V^R \left(R_A(B) \right)$$

X_V^L ist ein links–invariantes Vektorfeld auf $\mathrm{SO}(n)$.

(c) (1 Punkt) Lieklammern von rechts–invarianten (bzw. links–invarianten Vektorfeldern) sind rechts–invariant (bzw. links–invariant).

(d) (1 Punkt) Für $V, W \in \mathfrak{so}(n)$ gilt $[X_V^R, X_W^R](E) = -[V,W]_{\mathfrak{so}}$. Folgern Sie, dass $[X_V^R, X_W^R] = X^R_{-[V,W]_{\mathfrak{so}}}$. Was ändert sich für $[X_V^L, X_W^L]$?

Damit haben Sie gezeigt, dass $\mathfrak{so}(n) \cong \{X \in \mathcal{X}(\mathrm{SO}(n)) | X \text{ rechts–invariant}\}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 14. 11. 2007 um 10:00 Uhr.